Elaborada por la prof.
Cordelia Khouri

Unidad IV

Tema 4: FUNCIONES NOTABLES

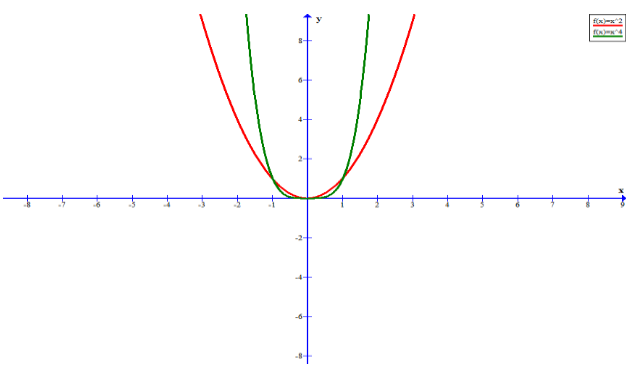
Para este tema investiga sobre Simetría de una función y Asíntotas Verticales y Horizontales de una función

Las funciones notables son modelos de funciones **$y=x^p$**. Según el valor de p estas funciones adoptan distintas características.

➢ Si p es par y positivo:

Es decir, $y=x^{2k}$ (Para denotar un número par multiplicas por 2, ej: 2k)

Su gráfica es una parábola



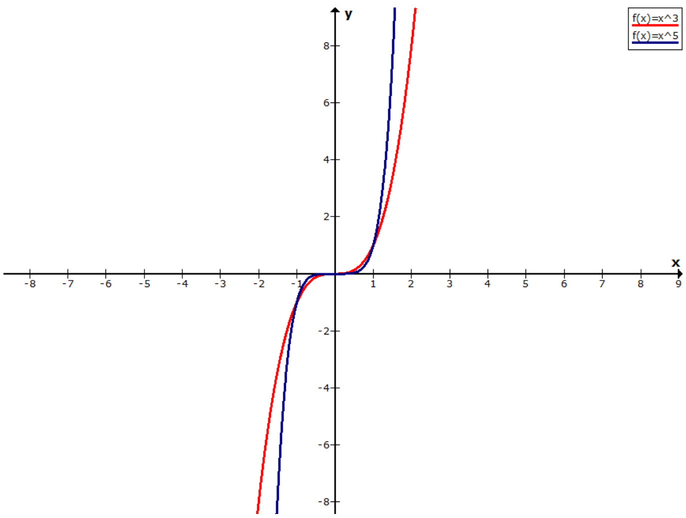
Repasa lo investigado y los temas anteriores y responde:

- ✓ ¿Cómo se llama la función $y=x^2$?
- ✓ ¿$y=x^{2k}$ tiene simetría? ¿y asíntotas?
- ✓ ¿Cómo sería la gráfica de $y=x^6$, e $y=x^8$?
- ✓ ¿Por qué cuando el exponente es más alto la gráfica se hace más estrecha?

- **Si p es impar y positivo:**

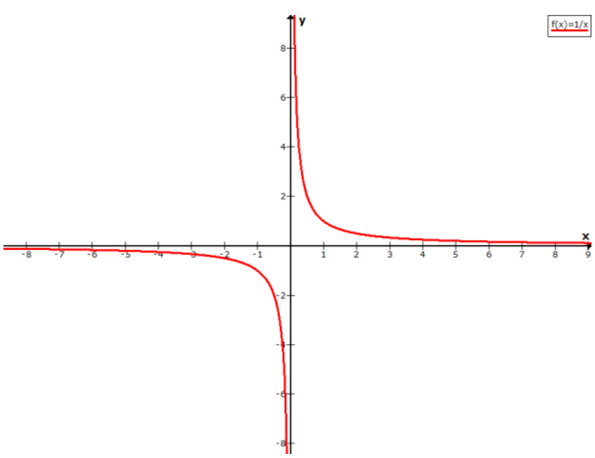
Es decir, $y=x^{2k+1}$ (la expresión 2k+1 denota un número impar cualquiera)

Algunas graficas ejemplo son:



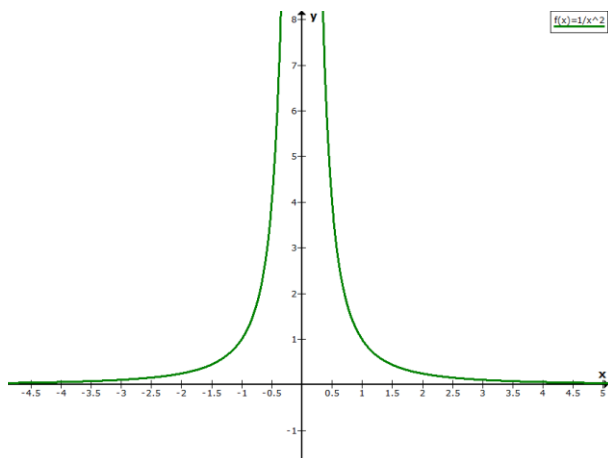
- ¿Esas gráficas tienen simetría? ¿y asíntotas?
- ¿Cómo sería la gráfica de $y=x^7$?
- ¿Por qué cuando el exponente es más alto la gráfica se hace más estrecha?

- **Si p=-1. Es decir, $y=x^{-1}$** o lo que es lo mismo, $y=1/x$



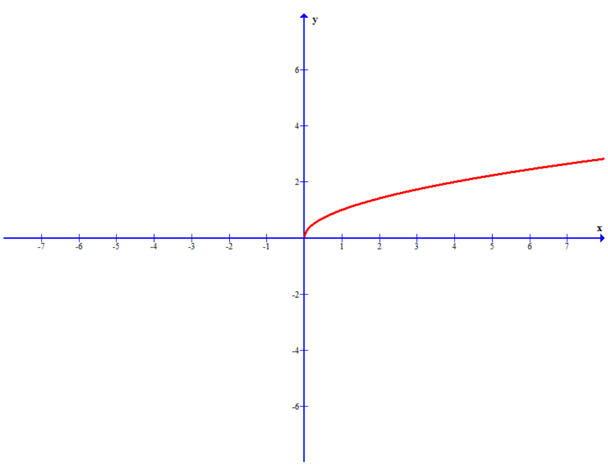
- ¿Cuál es el dominio?,¿y el rango?
- ¿Qué simetría tiene?
- Identifica las asíntotas.
- ¿A qué valor tiende Y cuando X tiende a un valor muy grande?
- ¿A qué valor tiende Y cuando X tiende a un valor muy pequeño, cercano al cero?

- **Si p=-2, es decir: $y=x^{-2}$** , o sea $y= 1/x^2$



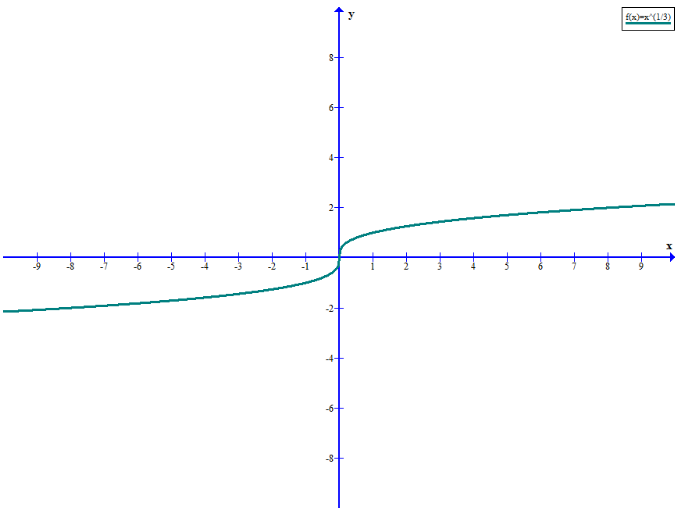
- ¿Cuál es el dominio?,¿y el rango?
- ¿Qué simetría tiene?
- Identifica las asíntotas.
- ¿Qué elementos comunes y que diferencias puedes identificar respecto a la gráfica de la función anterior?

- **Si p=1/2, es decir , $y=x^{1/2}$,** o lo que significa $y=\sqrt{x}$



- ¿Cuál es el dominio?,¿y el rango?
- ¿Tiene simetría? ¿y asíntotas?
- ¿Qué pasa en la gráfica para los valores de x si x<0?

- **Si p=1/3, es decir , $y=x^{1/3}$,** o lo que significa $y=\sqrt[3]{x}$

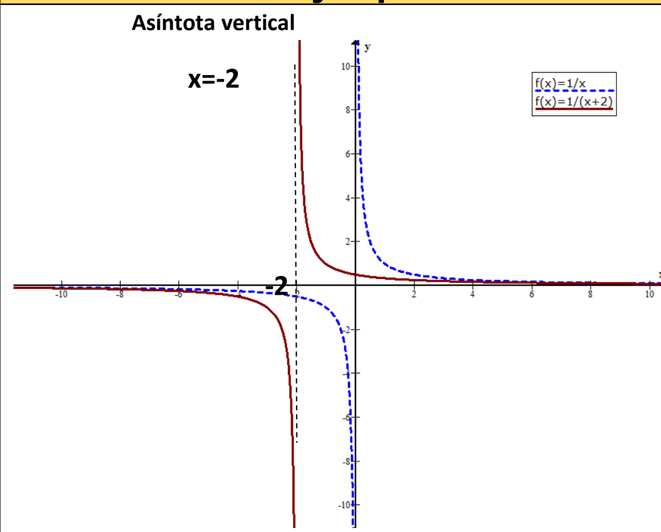
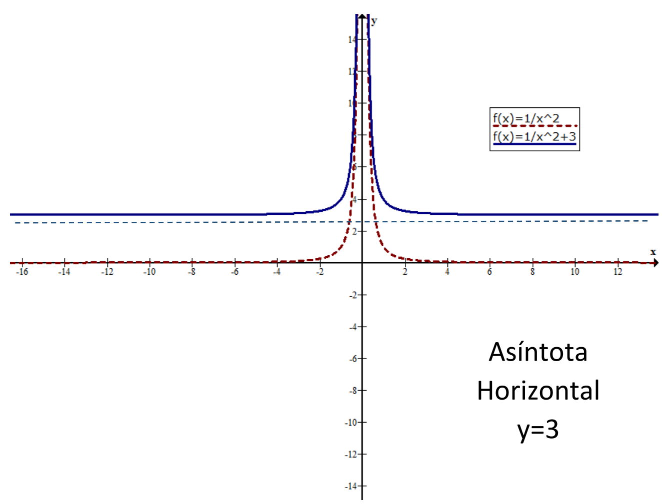


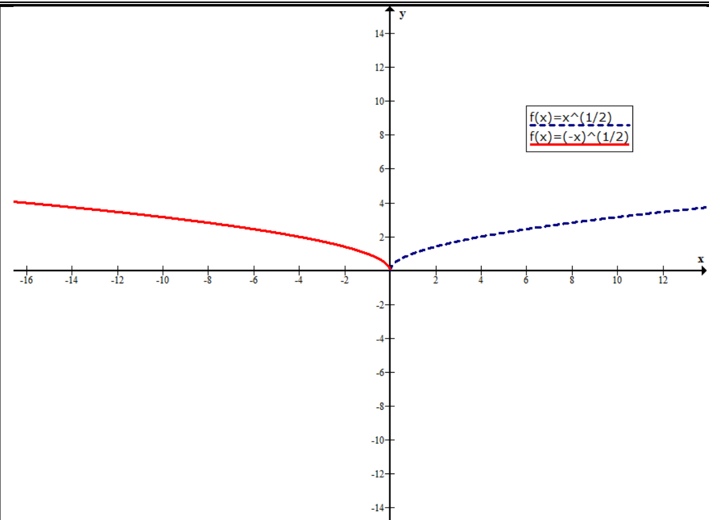
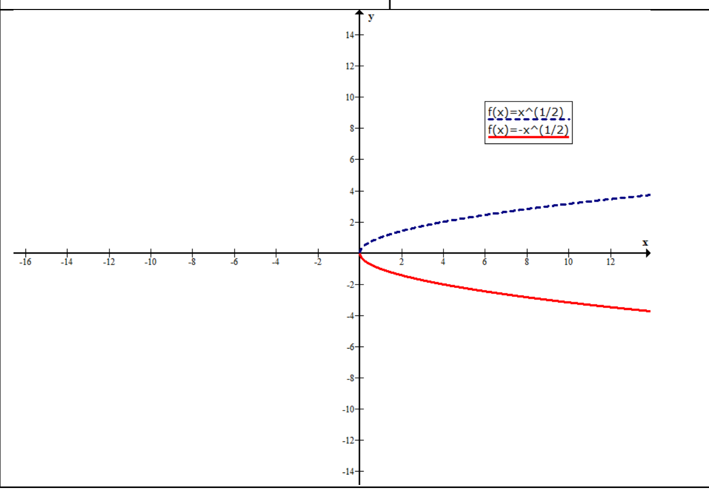
- ✓ ¿Cuál es el dominio?,¿y el rango?
- ✓ ¿Tiene simetría? ¿y asíntotas?
- ✓ Compara la gráfica de esta función con la función $y=x^3$. ¿qué observas?
- ✓ (Sugerencia: Sustituye x=2 en $y=x^3$, x=8 en $y=\sqrt[3]{x}$ y compara en los puntos de coordenada el intercambio que ocurre entre x e y. Prueba con otros puntos.)

TRASLACIONES Y TRANSFORMACIONES DE UNA FUNCIÓN:

Son transformaciones que ocurren en la función al cambiar el signo de alguna de las variables y/o sumarle alguna constante. Estas transformaciones también se aplican a las funciones exponenciales y logarítmicas que estudiarás en los próximos temas.

Observa con atención la siguiente tabla:

Transformación	Cambio en la gráfica	Ejemplo
$Y= f(x-h)$	Se traslada h unidades horizontalmente, $h > 0 \longrightarrow$ $h < 0 \longleftarrow$ **Nota:** Se traslada toda la función con todos sus elementos como asíntotas y cortes con los ejes coordenados.	
$Y= f(x) + k$	Se traslada k unidades verticalmente, $K > 0 \uparrow$ $K< 0 \downarrow$ **Nota:** Se traslada toda la función con todos sus elementos como asíntotas y cortes con los ejes coordenados.	

Y=f(-x)	La gráfica se refleja con respecto al eje y. (Es decir, f(-x) es simétrica a f(x) respecto al eje y)	
Y=-f(x)	La gráfica se refleja con respecto al eje x. (Es decir, -f(x) es simétrica a f(x) respecto al eje x)	

Ejercicios resueltos:

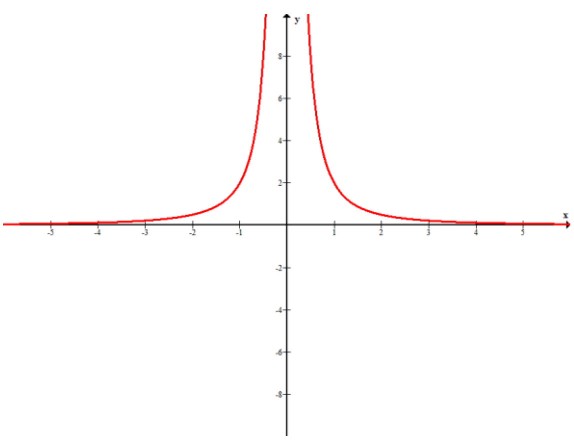
Observa y analiza los siguientes ejercicios resueltos. Revisa la teoría y luego resuelve los ejercicios propuestos.

A partir de las funciones notables realice la gráfica y determine dominio, rango, intersecciones con los ejes de coordenadas, simetría y asíntotas.

Ejemplo 1: $y = -\dfrac{2}{(x-1)^2} + 8$

Comenzamos por asociar la función dada a una de las funciones notables. En este caso es $y = \dfrac{1}{x^2}$, pues es un cociente con una constante en el numerador y el denominador esta al cuadrado.

Gráfica de $y = \dfrac{2}{x^2}$



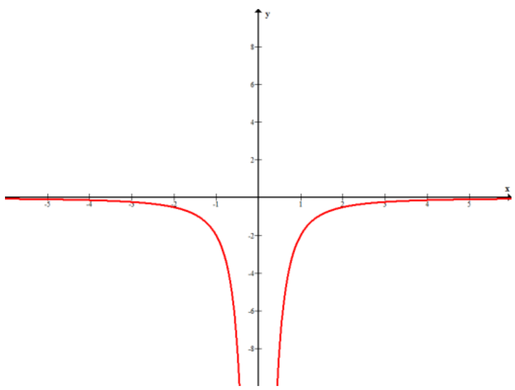
¡ALERTA!

La expresión x^2-1 no es igual a $(x-1)^2$. Por lo tanto, las funciones $y = \dfrac{1}{(x-1)^2}$ y $y = \dfrac{1}{x^2 - 1}$ y sus correspondientes gráficas, son diferentes. ***Con lo ya aprendido realiza ambas gráficas y compara.***

Luego identifica las transformaciones y traslaciones aplicadas a la función. En este caso, el signo negativo delante de la fracción, el valor 1 restando a x y 8 sumando a la función.

¿En que afecta el signo negativo? Revisa la tabla y observa la gráfica resultante:

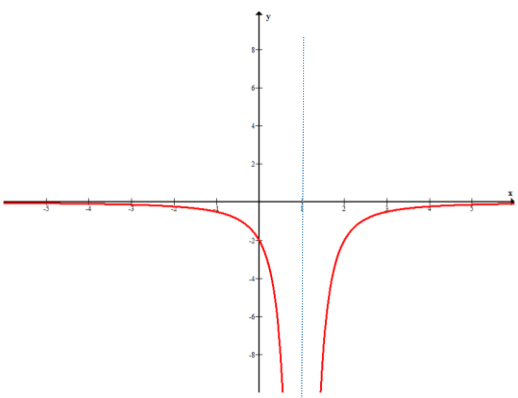
Gráfica de $y = -\dfrac{2}{x^2}$



La gráfica giró sobre el eje X

Luego revisa como afecta restar 1 a la variable x en la función.

Gráfica de $y = -\dfrac{2}{(x-1)^2}$

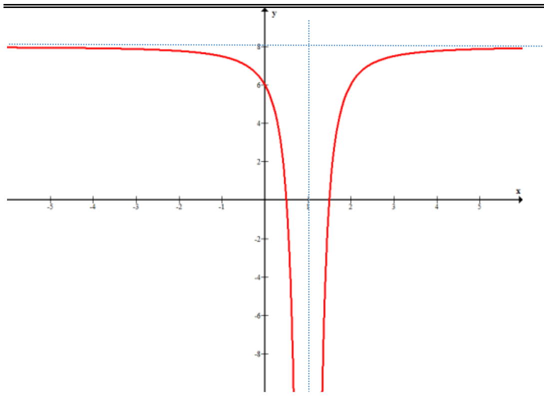


La gráfica se trasladó una unidad hacia la derecha (traslación horizontal).

¿Y ahora cual es la asíntota vertical?

Finalmente observa cómo afecta a la función sumar 8 unidades.

Gráfica de $y = -\dfrac{2}{(x-1)^2} + 8$



La gráfica se trasladó 8 unidades hacia arriba (traslación vertical).

Observa que también se traslada la asíntota horizontal. ¿Y la asíntota horizontal es…?

¿En qué me afecta el 2 en la función?

(Puedes analizarlo sustituyendo valores de x en $y=\frac{1}{x^2}$ y en $y=\frac{2}{x^2}$ y observa los cambios)

Ahora, a partir de la gráfica resultante identifica y verifica los siguientes datos:

Dominio: $x \in \Re - \{1\}$

Rango: $y \in (-\infty, 8)$

Intersecciones con los ejes:

Con el eje Y: si x=0, $y=-\frac{2}{(0-1)^2}+8=6$, P(0,6)

Con el eje X: si y=0, $0=-\frac{2}{(x-1)^2}+8 \rightarrow \frac{2}{(x-1)^2}=8 \rightarrow \frac{1}{4}=(x-1)^2$,

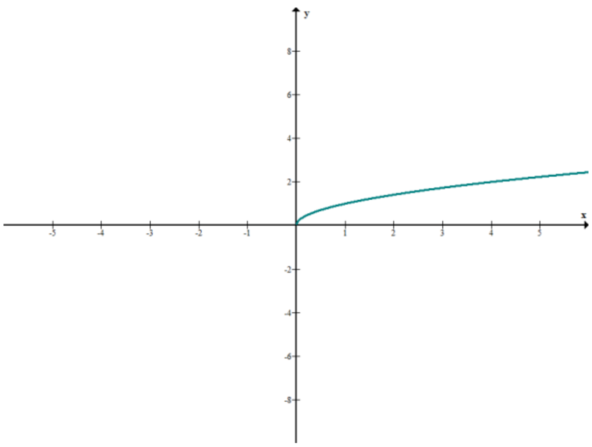
al resolver la ecuación queda x=1/2, x=3/2. Y los puntos de corte con el eje x son P(1/2,0) y P(3/2,0).

Asíntota Vertical: x=1

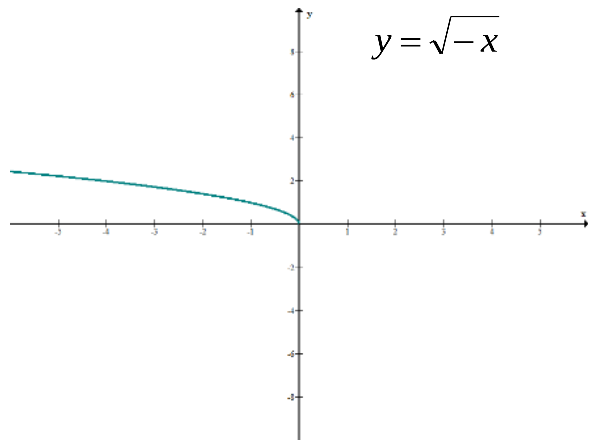
Asíntota Horizontal: y=8

Ejemplo 2: $y = -\sqrt{4-x}$

Esta función está asociada a la función $y = \sqrt{x}$,

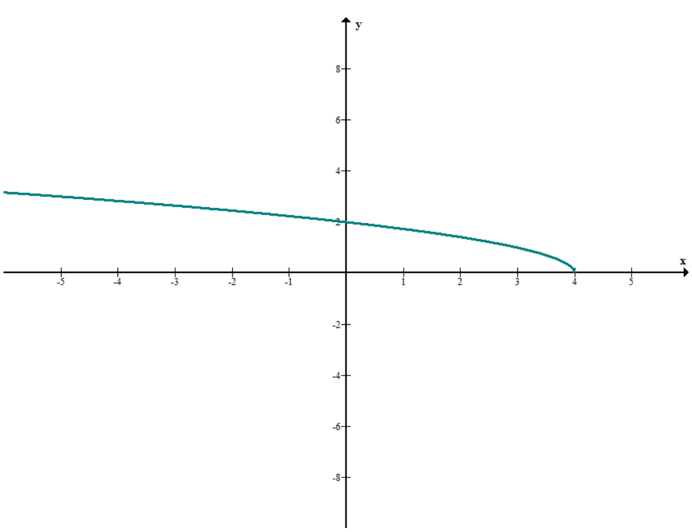


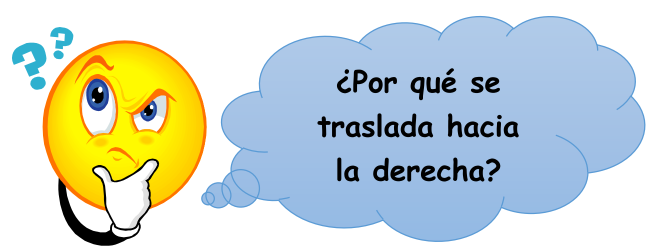
Observa cómo afecta a la gráfica el signo negativo que afecta a la variable x,



Y 4 unidades de traslación horizontal:

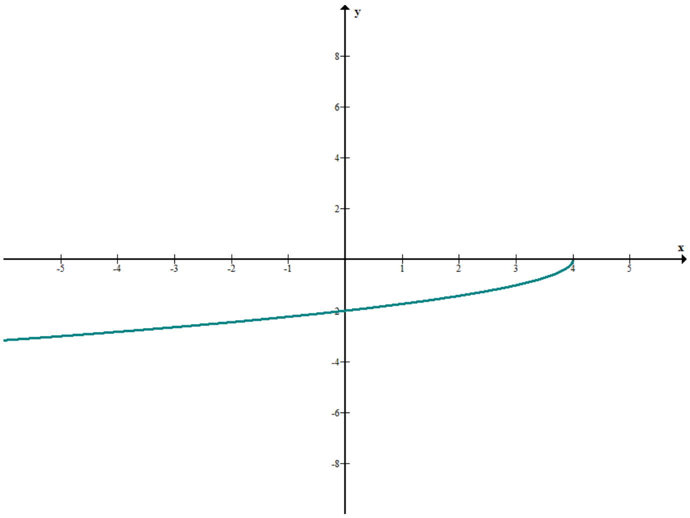
$y = \sqrt{4-x}$





Finalmente, el signo negativo delante de la raíz cuadrada,

$y = -\sqrt{4-x}$



Ahora verifica que

Dominio: $x \in (-\infty, 4]$

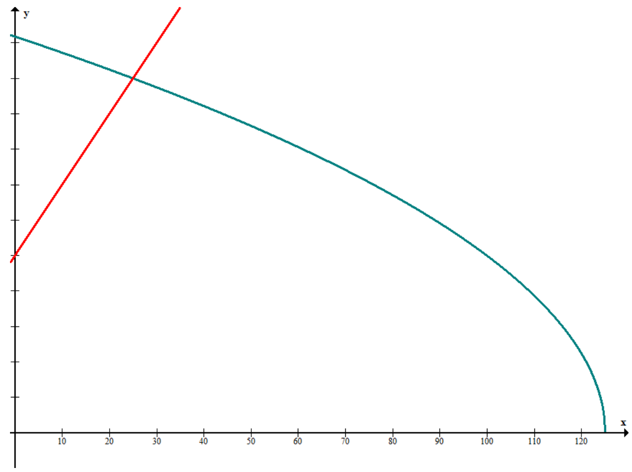
Rango: $y \in (-\infty, 0]$

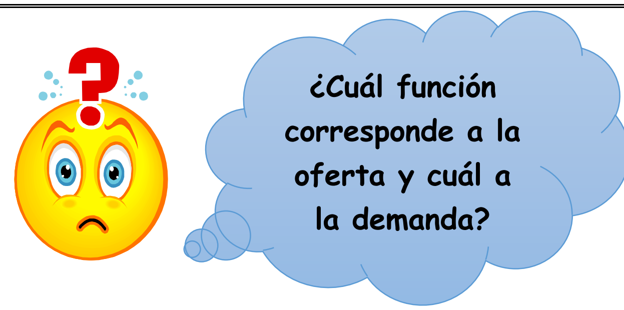
Intersecciones con los ejes: P(0,-2) y P(4,0)

Ejemplo 3:

Las funciones $p = \frac{q}{5} + 5$ y $p = \sqrt{125 - q}$ representan la oferta y demanda para un determinado artículo. Realice las gráficas y determine el punto de equilibrio de mercado.

Al analizar la función $p = \frac{q}{5} + 5$ puedes observar que es una recta de pendiente positiva, y la función $p = \sqrt{125 - q}$ es la función raíz cuadrada.





Para calcular el punto de equilibrio de mercado, se intersectan la oferta y demanda. (Revisa el tema de sistemas de ecuaciones)

De tal manera que

$$\frac{q}{5}+5=\sqrt{125-q}$$

$$\left(\frac{q}{5}+5\right)^2=\left(\sqrt{125-q}\right)^2 \rightarrow \frac{q^2}{25}+2q+25=125-q,$$

Resuelve la ecuación de segundo grado y obtendrás las soluciones q=25 y q=-100.

Como se busca calcular el punto de equilibrio se descarta la solución negativa. Luego, si q=25, entonces p=10 (sustituye q en cualquiera de las dos funciones para obtener p).
Se obtiene el equilibrio de mercado para 25 unidades a un precio de 10 unidades monetarias.

Ejemplo 4:

La función de demanda para un artículo es $p=\frac{40}{\sqrt{x}}$. El costo fijo es \$300 semanal y el variable es \$1 por unidad. Determine las funciones ingreso y costo, los puntos de equilibrio y el intervalo de cantidad que genera ganancia.

Para obtener la función Ingreso recuerda que

Ingreso = PrecioxCantidad

Como el precio viene dado por la función de demanda,

$I(x)=\frac{40}{\sqrt{x}}x$, simplificando queda $I(x)=40\sqrt{x}$

Para obtener la función Costo:

Costo total= Costo variable+ Costo fijo

Por lo tanto, **C(x)=x+300.**

Para determinar puntos de equilibrio igualamos Ingreso y Costo,

$$x+300=40\sqrt{x}$$
$$x-40\sqrt{x}+300=0$$

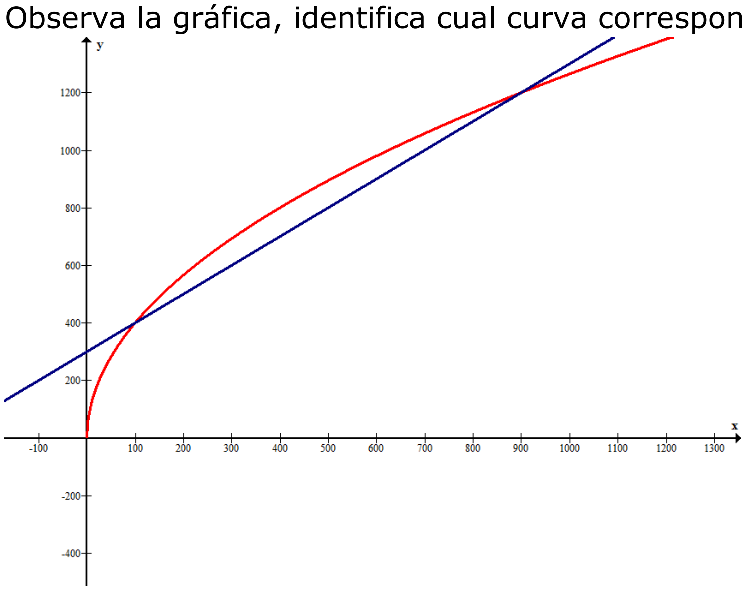
Como es una ecuación de segundo grado, factorizamos (sugerencia: puedes realizar un cambio de variable como x=t^2),

$$\left(\sqrt{x}-10\right)\left(\sqrt{x}-30\right)=0$$

Luego, $\sqrt{x}=10 \rightarrow x=100, \quad \sqrt{x}=30 \rightarrow x=900$.

Se produce equilibrio en x=100 y x=900.

Observa la gráfica, identifica cual curva corresponde a ingreso y cual corresponde a costo:



Recuerda

Ganancia

U=Ingreso-Costo

Observa también que se generan dos puntos de equilibrio.

¿En qué intervalo se produce ganancia?

Para que se produzca ganancia el ingreso debe superar al costo. La respuesta está en el intervalo entre los puntos de equilibrio, es decir, entre 100 y 900 unidades. ¿Por qué?. (Observa cuál grafica está por encima en ese intervalo)

Ejemplo 5:

La función de demanda para un artículo es $p = \dfrac{400}{q+4}$ y la función de oferta es 2p-q-38=0 a p$ por artículo. Determine el punto de equilibrio de mercado y realice las gráficas.

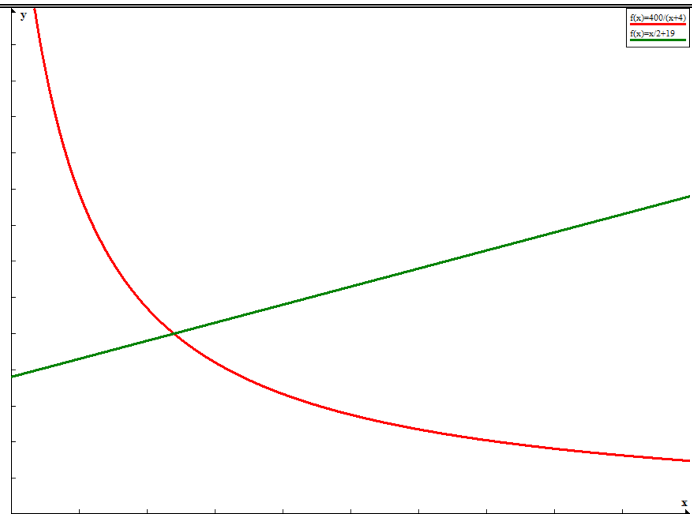
Para obtener el punto de equilibrio debemos igualar las funciones Oferta y Demanda, pero ambas deben estar expresadas como p=f(q). Por lo tanto, despejamos p de la función de Oferta: $p = \dfrac{q}{2} + 19$. Luego,

$$\frac{400}{q+4} = \frac{q}{2} + 19 \quad \rightarrow \quad \frac{400}{q+4} = \frac{q+38}{2} \quad \rightarrow \quad 800 = (q+38)(q+4),$$

Resuelve el producto y la ecuación de 2do grado que queda. Obtendrás los resultados

q=12 y q=-54

Como el problema se refiere a oferta y demanda naturalmente se descarta el resultado negativo, por lo tanto, el equilibrio se alcanza cuando se venden q=12 artículos a p=$25 por unidad.



Nota:

En el eje x está representada la variable q y en el eje y la variable p.

¿Por qué la intersección daría dos valores de q si en la gráfica veo solo una intersección?

(para responder realiza la gráfica completa)

Ejercicios propuestos:

I) A partir de las funciones notables, realiza la gráfica y determine dominio, rango, intersecciones con los ejes, simetría y asíntotas.

1) $y=(x-2)^3+4$	**6)** $y=-\dfrac{1}{(x+3)^2}+5$
2) $y=(-x+3)^2-1$	**7)** $y=-(5-x)^2-3$
3) $y=-\dfrac{4}{x-5}+2$	**8)** $y=\sqrt{16-x}+2$
4) $y=-\sqrt{x+5}+1$	**9)** $y=\dfrac{10}{4-x}+2$
5) $y=\sqrt[3]{27-x}-4$	**10)** $y=-\sqrt[3]{x+8}$

II) A partir de las funciones dadas de oferta y demanda, donde p representa precio y x representa cantidad, identifique cual función corresponde a oferta y cuál corresponde a demanda. Determine punto de equilibrio y gráfica

1) $p = \frac{5}{3}q + 2, \quad p = \frac{18}{q} + 1$
2) $p = -2q + 25, \quad p = \sqrt{q+6} + 1$
3) $p = \frac{q^3}{8}, \quad p = -q + 3$
4) $p = \sqrt[3]{q+1} - 1, \quad p = -q + 8$
5) $p = \frac{3}{4}q + 3, \quad p = -q^2 + 10$
6) $p = -\frac{16}{q^2} + 10, \quad p = \frac{5}{4}q + 4$

Complemente esta y todas las guías con la bibliografía recomendada en el cronograma.