ELABORADA POR LOS PROFESORES:
ELVIRA SABAL Y JORGE OMAR

GUÍA DE APOYO

ECUACIONES e INECUACIONES.

Tema 1: Ecuaciones lineales. Problemas relacionados con ecuaciones lineales.

Una ecuación es una igualdad que se cumple para algunos valores de las letras. Por ejemplo, las igualdades $x + 2 = 3$ y $x^2 + y^2 = 1$ son ecuaciones de una y dos variables respectivamente.

Los miembros de una ecuación son cada una de las expresiones que aparecen a ambos lados del signo igual.

- Los términos son los sumando que forman los miembros.

Primer Miembro | **Segundo Miembro**

$$\mathbf{5x - 4 = 7x - 8}$$

Términos

- Las *incógnitas* son las letras que aparecen en la ecuación.
- Las *soluciones* son los valores que deben tomar las letras para que la igualdad sea cierta.
- Una *identidad* es una igualdad que se satisface para todos los posibles valores de las variables que aparecen en ambos miembros
- Dos ecuaciones son *equivalentes* si tienen exactamente las mismas soluciones.
- Resolvemos una ecuación al hacer una lista de ecuaciones equivalentes, cada una en algún sentido más sencilla que la precedente, terminando la lista con una ecuación de la cual las soluciones se pueden obtener fácilmente.
- Para obtener a partir de una ecuación dada otra equivalente, se usan *transformaciones equivalentes*, por ejemplo, sumar o restar la misma expresión a ambos lados, también podemos multiplicar o dividir ambos lados de una ecuación por una expresión que representa un número real diferente de cero.

Una ecuación lineal o de primer grado con una incógnita es una ecuación que se puede reducir con transformaciones equivalentes a la forma

$$\boxed{\mathbf{ax+b=0,\ \ (a,b\ \text{reales},\ \ a\neq 0)}}$$

- Ejemplo: Resolver la ecuación $6x-7=2x+5$

Solución: Podemos realizar las siguientes transformaciones equivalentes
Partiendo del enunciado 6x-7 = 2x+5 sumamos 7 a ambos lados y resulta la ecuación equivalente (6x-7)+7 = (2x+5)+7, simplificando tenemos 6x = 2x+12, si restamos 2x a ambos lados de la última ecuación obtenemos 6x-2x = (2x+12)-2x, que después de simplificar nos da 4x = 12, al dividir entre 4 ambos lados de esta ecuación y simplificar obtenemos finalmente la ecuación equivalente x = 3, para esta última es obvio que el número 3 es solución

- Resolver la ecuación $5x - 4 = 7x - 8$ y comprobar el resultado
  Para resolver la ecuación se realizan transformaciones equivalentes reflejadas en las ecuaciones (2),(3) y (4).¿Cuáles son estas transformaciones?

5x-4=7x-8 (1)
5x-7x=-8+4 (2)
-2x=-4 (3)
x=2 (4)

Para comprobar si la respuesta es correcta sustituimos el valor de $\boxed{x = 2}$ en la ecuación (1) y llegamos a una igualdad verdadera:

$$5(2) - 4 = 7(2) - 8$$
$$10 - 4 = 14 - 8$$
$$6 = 6$$

En general **para resolver una ecuación de primer grado** debemos seguir los siguientes pasos:

1. Quitar signos de agrupación (paréntesis, corchetes y llaves)
2. Quitar denominadores (linealizar)
3. Agrupar los términos en x (variable dada) en un miembro y los términos independientes en el otro.
4. Reducir los términos semejantes
5. Despejar la incógnita.

Ejemplo 1: $2(2x - 3) = 6 + x$

Quitamos paréntesis.

$$4x - 6 = 6 + x$$

Agrupamos términos y sumamos algebraicamente

$$4x - x = 12\,, \quad 3x = 12$$

Despejamos la incógnita

$$x = \frac{12}{3} \qquad x = 4$$

Ejemplo 2: $\frac{x-1}{6} - \frac{x-3}{2} = -1$

Quitamos denominadores, para ello en primer lugar hallamos el mínimo común múltiplo

m.c.m. (6,2) = 6 $\quad x - 1 - 3\,(x-3) = -6$

Quitamos paréntesis, agrupamos y sumamos los términos semejantes

$$x - 1 - 3x + 9 = -6; \qquad x - 3x = -6 - 9 + 1; \qquad -2x = -14$$

Despejamos la incógnita

$$2x = 14, \qquad x = \frac{14}{2}, \qquad x = 7$$

Ejemplo 3: $2 - \left[-2\,(x+1) - \frac{x-3}{2}\right] = \frac{2x}{3} - \frac{5x-3}{12} + 3x$

Quitamos paréntesis $2 - \left[-2x - 2 - \frac{x-3}{2}\right] = \frac{2x}{3} - \frac{5x-3}{12} + 3x$

Quitamos corchete $2 + 2x + 2 + \frac{x-3}{2} = \frac{2x}{3} - \frac{5x-3}{12} + 3x$

Quitamos denominadores (mcm= 12) $\quad 24 + 24x + 24 + 6x - 18 = 8x - 5x + 3 + 36x$

Agrupamos términos $24x + 6x - 8x + 5x - 36x = -24 - 24 + 18 + 3$

Sumamos algebraicamente términos semejantes $-9x = -27$

Dividimos los dos miembros por -9 $x = \frac{-27}{-9} \qquad x = 3$

Expresiones algebraicas comunes:

- El doble o duplo de un número: 2x
- El triple de un número: 3x
- El cuádruplo de un número: 4x
- La mitad de un número: x/2
- Un tercio de un número: x/3
- Un cuarto de un número: x/4
- Un número al cuadrado: x^2
- Un número al cubo: x^3

Ejemplo 4: Aplicación

A una compañía grabadora le cuesta 6000 millones de BsF. preparar un álbum de discos –los costos de grabación, los costos de diseño del álbum, etc. Estos costos representan un costo fijo en el tiempo. La fabricación, ventas y costos de regalías (todos costos variables) son BsF 2,5 millones por álbum. Si el álbum se vende a las distribuidoras en BsF. 4 millones cada uno ¿Cuántos álbumes debe vender la compañía para estar en el punto de equilibrio?

Solución: Sean

x= número de unidades vendidas
C= costo para producir x unidades
R= ingresos sobre la venta de x unidades.
La compañía alcanza su punto de equilibrio cuando R=C, con C= costos fijos + costos variables
C= 6000 + 2,5 x
R= 4 x
Debe encontrarse x tal que R = C; es decir, tal que 4x = 6000 + 2,5 x. Despejando tenemos
1,5 x = 6000 , x = 4000
Respuesta: en consecuencia, la compañía debe vender 4000 unidades para estar en el punto de equilibrio; cualquier venta por arriba de 4000 producirá una utilidad (ganancia); y las ventas por debajo de 4000 producirán una pérdida.

Sugerencia para resolver problemas verbales

- Lea el problema con todo cuidado
- Escriba los datos y relaciones importantes
- Identifique las cantidades desconocidas en términos de una sola letra, si es posible
- Escriba una ecuación o desigualdad que relacione las cantidades desconocidas con los datos del problema.
- Resuelva la ecuación (o desigualdad)
- Escriba todas las soluciones que se piden para el problema original
- Compruebe la(s) solución(es) del problema original.

Ejercicios para practicar

1) Resuelva las siguientes ecuaciones:

a) $t = 2 - 2[2t - 3(1 - t)]$ R: $x = \frac{8}{11}$

b) $3x + \frac{x}{5} - 5 = \frac{1}{5} + 5x$ R: $x = -\frac{26}{9}$

c) $\frac{x+2}{3} - \frac{2-x}{6} = x - 2$ R: $x = \frac{14}{3}$

d) $\frac{2y-3}{4} = \frac{6y+7}{3}$ R: $x = -\frac{37}{18}$

e) $\frac{2y-7}{3} + \frac{8y-9}{14} = \frac{3y-5}{21}$ R: $x = \frac{5}{2}$

2) La ecuación $I = Prt$ es la fórmula para el interés simple I sobre un capital de P BsF. a una tasa de interés anual r en un período de t años. Exprese r en términos de $I, P\ y\ t$.

3) Un agente de ventas necesita calcular el costo de un artículo cuyo impuesto de venta de 8,25%. Escriba una ecuación que represente el costo total C de un artículo que cuesta x BsF.

R: $C = x + 0{,}0825\,x = 1{,}085\,x$

4) Depreciación lineal. Si usted compra un artículo para uso empresarial, puede repartir su costo entre toda la vida útil del artículo cuando prepare la declaración de impuestos. Esto se denomina depreciación. Un método de depreciación es la depreciación lineal, en la cual la depreciación anual se calcula al dividir el costo del artículo, menos su valor de rescate, entre su vida útil. Suponga que el costo es C BsF., la vida útil es N años y no hay valor de rescate. Entonces el valor V (en BsF.) del artículo al final de n años está dado por $V = C\left(1 - \frac{n}{N}\right)$. Si el mobiliario nuevo de una oficina se compró por BsF 3200, tiene una vida útil de 8 años y no tiene valor de rescate, ¿después de cuántos años tendrá un valor de BsF 2000? R: 3 años.

Tema 2: Ecuaciones de grado 2 y superiores. Resolución

Una ecuación de segundo grado es toda expresión de la forma: $ax^2 + bx + c = 0 \quad con \quad a \neq 0$

Se puede resolver mediante:

a) la siguiente fórmula: $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

b) factorizando y el resultado serían las raíces obtenidas.

c) aplicando Ruffini

EJEMPLO 1:

Hallar los valores de la variable en la siguiente ecuación $x^2 - 5x + 6 = 0$

a) Solución aplicando la fórmula: $x = \frac{5 \pm \sqrt{5^2 - 4.6}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} =$ $x_1 = \frac{6}{2} = 3$; $x_2 = \frac{4}{2} = 2$

b) Solución aplicando factorización: $(x-3).(x-2) = 0$

cuyas raíces son $x_1 = 3$; $x_2 = 2$

c) Solución aplicando Ruffini

	1	-5	6
x=2		2	-6
	1	-3	0
X=3		3	
	1	0	

Si a < 0, multiplicamos los dos miembros por (-1)

Ejemplo 2: Resolver la ecuación cuadrática $-x^2 + 7x - 10 = 0$

$$(-\mathbf{1}).(-x^2 + 7x - 10) = (-1).0$$
$$x^2 - 7x + 10 = 0$$

Y se aplica cualquiera de los métodos
Respuesta: $x_1 = 5;\ x_2 = 2$

Ejercicios para practicar:

1) $2x^2 - 7x + 3 = 0$ $\qquad x_1 = 3;\ x_2 = 1/2$
2) $2x - 3 = 1 - 2x + x^2$ $\qquad x = 2$
3) $x^2 + (7 - x)^2 = 25$ $\qquad x_1 = 3;\ x_2 = 4$
4) $7x^2 + 21\,x - 28 = 0$ $\qquad x_1 = 1;\ x_2 = -4$
5) $18 = 6x + x(x - 13)x_1 = 9;\ x_2 = -2$
6) $x^2 + (x + 2)^2 = 580$ $\qquad x_1 = 16;\ x_2 = -18$
7) $4x^2 - 6x + 2 = 0$ $\qquad x_1 = 1;\ x_2 = 1/2$
8) $x^2 - \frac{7}{6}x + \frac{1}{3} = 0$ $\qquad x_1 = 2/3;\ x_2 = 1/2$

Resolución de ecuaciones de segundo grado incompletas:

1) $ax^2 = 0$ La solución es x = 0

Ejemplo: $\frac{5}{7}x^2 = 0$ la solución es x = 0

2) $ax^2 + bx = 0$

Extraemos factor común x: $x(ax+b)=0$ como tenemos un producto igualado a cero o un factor es cero o el otro factor es cero o los dos son cero, por tanto $x=0$es una de las soluciones, la otra solución resulta de $ax+b=0,\ \ es\ decir\ \ \ x=\frac{-b}{a}$

Ejemplo: $7x^2-\ 5x=0,\quad x(7x-5)=0$

Respuesta: $x_1=0 \qquad x_2=\frac{5}{7}$

Ejemplo: $2x^2-6x=0,\quad 2x(x-3)=0$

Respuesta: $x_1=0 \qquad x_2=\ 3$

3) $ax^2+\ c=0$

a. En primer lugar pasamos el término "c" al segundo miembro cambiado de signo.
b. Pasamos el coeficiente al 2do. Miembro, dividiendo.
c. Se efectúa la raíz cuadrada en ambos miembros

$$ax^2=-c \qquad x^2=\frac{-c}{a} x_1=\sqrt{\frac{-c}{a}} x_2=-\sqrt{\frac{-c}{a}}$$

Debemos comprobar las soluciones, para rechazar posibles soluciones extrañas provenientes de la ecuación transformada

Ejemplo 3: $\mathbf{2x^2+8=0}$

Solución: $2x^2=-8$, $\quad x^2=\ -4$, $\quad x=\pm\sqrt{-4} \quad \notin\ \mathbb{R}$

Por ser el radicando negativo no tiene solución en los números reales

Ejercicios interesantes:

1) Escribir una ecuación de segundo grado cuyas soluciones son: 3 y -2
2) Determinar "k" de modo que las dos raíces de la ecuación $x^2-kx+36=0$ sean iguales.
3) La suma de dos números es 5 y su producto es -84. Halla dichos números.
4) Dentro de 11 años la edad de Pedro será la mitad del cuadrado de la edad que tenía hace 13 años. Calcula la edad de Pedro.
5) Halla un número entero sabiendo que la suma con su inverso es 26/5

Tema3: Ecuaciones racionales e irracionales.

Ecuaciones Racionales: Son ecuaciones en las que aparecen fracciones polinómicas.

Para resolver estas ecuaciones se multiplican ambos miembros de la ecuación por el mínimo común múltiplo de los denominadores.

Ejemplo 1:

$$\frac{1}{x^2 - x} - \frac{1}{x-1} = 0$$

m.c.m. $(x^2 - x, x - 1) = x\,(x-1)$

$$\frac{1-x}{x(x-1)} = 0 \qquad 1 - x = 0 \qquad x = 1$$

Probemos: $\frac{1}{1-1} - \frac{1}{1-1} = 0$

La ecuación no tiene solución porque para x =1 se anulan los denominadores.

Ejemplo 2:

$$\boldsymbol{\frac{1}{x-3} + \frac{1}{x+3} = \frac{1}{x^2-9}}$$

m.c.m. $\boldsymbol{x^2 - 9 = (x-3)(x+3)}$

$$x + 3 + x - 3 = 1 \qquad 2x = 1 \qquad x = 1/2$$

Probemos: $\frac{1}{\frac{1}{2}-3} + \frac{1}{\frac{1}{2}+3} = \frac{1}{\frac{1}{4}-9}$, $\frac{1}{-5/2} + \frac{1}{7/2} = \frac{1}{-\frac{35}{4}}$, $-\frac{2}{5} + \frac{2}{7} = \frac{-4}{35}$, $\frac{-4}{35} = \frac{-4}{35}$

La solución es $x = 1/2$

Ejercicios para practicar:

1) $\frac{4x-10}{1-x^2} = \frac{4x-6}{1-x}$ R: No tiene solución real

2) $\frac{5}{x} + \frac{3}{2x^2-3x} = \frac{1}{2x-3}$ R: x=4/3

3) $\frac{x-1}{x} - 2 = \frac{-x-1}{x^2-2x}$ R: x= -1, x=3

4) $\frac{x+4}{2x} - \frac{15x+3}{x^3} = \frac{2x-6}{2x^3}$ R: x=4; x= -8

Ecuaciones Irracionales: también reciben el nombre de ecuaciones con radicales, son aquellas que tienen la incógnita bajo el signo radical. Por ejemplo,

$$\sqrt{2x-3} - x = -1$$

Resolución de ecuaciones irracionales:

1) Se aísla un radical en uno de los dos miembros, pasando al otro miembro el resto de los términos, aunque tengan también radicales.

2) Se elevan al cuadrado los dos miembros
3) Se resuelve la ecuación obtenida.
4) Se comprueba si las soluciones obtenidas verifican la ecuación inicial. Hay que tener en cuenta que al elevar al cuadrado una ecuación se obtiene otra que tiene las mismas soluciones que la dada y, además las de la ecuación que se obtiene cambiando el signo de uno de los miembros de la ecuación.
5) Si la ecuación tiene varios radicales, se repiten las dos primeras fases del proceso hasta eliminarlos todos.

Ejemplo 1:

$$\sqrt{2x-3} - x = -1$$

Aislamos el radical $\sqrt{2x-3} = -1 + x$

Elevamos al cuadrado los dos miembros $\left(\sqrt{2x-3}\right)^2 = (-1+x)^2$

$$2x - 3 = 1 - 2x + x^2$$

Resolvemos la ecuación $x^2 - 4x + 4 = 0$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16-16}}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

Comprobamos $\sqrt{2.(2)-3} - 2 = -1$

La ecuación tiene por solución $x = 2$

Ejemplo 2:

$$\sqrt{\mathrm{x}} + \sqrt{\mathrm{x}-4} = 2$$
$$\sqrt{\mathrm{x}} = 2 - \sqrt{\mathrm{x}-4}$$
$$\left(\sqrt{\mathrm{x}}\right)^2 = \left(2 - \sqrt{\mathrm{x}-4}\right)^2$$
$$\mathrm{x} = 4 - 4\sqrt{\mathrm{x}-4} + \mathrm{x} - 4$$
$$\left(4\sqrt{\mathrm{x}-4}\right)^2 = (0)^2 \qquad \mathrm{x} - 4 = 0 \qquad \mathrm{x} = 4$$
$$\sqrt{4} + \sqrt{4-4} = 2$$

La ecuación tiene por solución $\boldsymbol{x = 4}$

Ejercicios para practicar:

1) $\sqrt{5x+4} - 1 = 2x$ R: x=1

2) $3\sqrt{x-1} + 11 = 2x$ R: x=10

3) $\sqrt{2x-1} + \sqrt{x+4} = 6$ R: x=5

Ecuaciones bicuadradas: Son ecuaciones de cuarto grado sin términos de grado impar: $ax^4 + bx^2 + c = 0$.

Resolución de ecuaciones bicuadradas: Para resolver este tipo de ecuaciones efectuamos el cambio $x^2 = t,\ x^4 = t^2$; con lo que se genera una ecuación de segundo grado con la incógnita t: $at^2 + bt + c = 0$. Por cada valor positivo de "t" habrá dos valores de x: $x = \pm\sqrt{t}$.

Ejemplo: $x^4 - 6x^2 + 8 = 0$
Solución: Sustituyendo $x^2 = t,\ x^4 = t^2$; tenemos la ecuación cuadrática$t^2 - 6t + 8 = 0$, factorizando $(t-4)(t-2) = 0$ se llega a la solución $t = 4,\ t = 2$, por tanto las soluciones de la ecuación original son: x=± 2, $x = \pm\sqrt{2}$.

Ecuaciones de Orden Superior

Es una ecuación de cualquier grado escrita de la forma P(x) = 0, el polinomio P(x) se puede descomponer en factores de primer y segundo grado, entonces basta igualar a cero cada uno de los factores y resolver las ecuaciones de primer grado y de segundo grado resultantes.

Ejemplo 1:$\boldsymbol{2x^4 + x^3 - 8x^2 - x + 6 = 0}$

Utilizamos el teorema del resto y la regla de Ruffini

$$P(x) = \boldsymbol{2x^4 + x^3 - 8x^2 - x + 6}$$

Tomamos lo divisores del término independiente$\boldsymbol{\pm 1, \pm 2, \pm 3}$

Aplicando el teorema del resto sabremos para que valores la división es exacta

$$\boldsymbol{P(1) = 2.1^4 + 1^3 - 8.1^2 - 1 + 6 = 0}$$

Dividimos por Ruffini

	2	1	-8	-1	6
X=1		2	3	-5	-6
	2	3	-5	-6	0

Por ser la división exacta, D = d.c

$$(x-1).(2x^3 + 3x^2 - 5x - 6) = 0$$

Una raíz es x = 1

Continuamos realizando las mismas operaciones al segundo factor,
Volvemos a probar por 1 porque el primer factor podría estar elevado al cuadrado.

$$P(1) = 2.1^3 + 3.1^2 - 5.1 - 6 \neq 0$$
$$P(-1) = 2.(-1)^3 + 3.(-1)^2 - 5.(-1) - 6 = 0$$

	2	3	-5	-6
X=-1		-2	-1	6
	2	1	-6	0

$$(x-1)(x+1)(2x^2+x-6)=0$$

Otra raíz es x = -1
Los otros factores lo podemos encontrar aplicando la ecuación de segundo grado y las respuestas dan $x_1 = \frac{3}{2} x_2 = -2$
Respuesta: $x_1 = 1;\ \ x_2 = -1,;\ x_3 = -2;\ x_4 = 3/2$

Ejercicios de Aplicación variados:

1) La compañía García fabrica un producto para el cual el costo variable por unidad de BsF. 6 y el costo fijo de BsF. 80000. Cada unidad tiene un precio de venta de BsF. 10. Determine el número de artículos que deben venderse para obtener una utilidad de BsF 60000. R: q=35000 unidades.

2) El IQ (coeficiente de inteligencia) se encuentra dividiendo la edad mental (EM), como recomiendan las pruebas estándar, entre la edad cronológica (EC) y multiplicando por 100. Por ejemplo, si un niño tiene una edad mental de 12 años y una edad cronológica de ocho, el IQ calculado es 150. Si una niña de nueve años tiene un IQ de 140, calcule su edad mental.
R: 12,6 años

3) Arte produce ropa deportiva para dama y planea vender su nueva línea de pantalones a las tiendas minoristas. El costo para ellos será de de BsF. 33 por pantalón. Para mayor comodidad del

Recuerde:
Costo Total*= costo variable + costo fijo*
Ingreso Total *(s el dinero que un fabricante recibe por la venta de su producción)*
*= Precio por unidad * número de unidades vendidas.*

minorista, Arte colocará una etiqueta con el precio en cada par de pantalones. ¿Qué cantidad debe ser impresa en las etiquetas de modo que el minorista pueda reducir este precio en un 20% durante una venta y aún obtener una ganancia de 15% sobre el costo?
Nota: precio de venta= costo por pantalón + utilidad por pantalón R: p = BsF 47,44

4) Se invirtió un total de BsF. 10000 en acciones de dos compañías, A y B. Al final del primer año, A y B tuvieron rendimientos de 6% y 5,75%, respectivamente, sobre las inversiones originales. ¿Cuál fue la cantidad original asignada a cada empresa, si la utilidad total fue de BsF. 588,75?
R: se invirtieron BsF. 5500 al 6%, y BsF. 10000- 5500= 4500 al 5,75.

5) *Investigación sobre seguridad*.
Tiene considerable importancia saber el número mínimo de pies "d" en que un automóvil puede detenerse, incluyendo el tiempo de reacción del conductor, a diferentes velocidades "v" (en millas/hora). La investigación sobre seguridad ha producido la fórmula $d = 0.044\ v^2 + 1{,}1\ v$. Si un

automóvil requiere 550 pies para detenerse, estime la velocidad del carro en el momento en que se inicia el proceso de detención. R: 100 millas/hora

6) *Oferta y demanda*
La ecuación de la demanda para una cierta marca de discos populares es $d = 3000/P$. Observe que a medida que el precio (p) aumenta, el número de discos que se espera que la gente compre (d) disminuye, y viceversa. La ecuación de la oferta está dada por $s = 1000\,p - 500$. Observe, otra vez, que a medida que el precio (p) aumenta, el número de discos que se espera que un distribuidor pueda vender (s) también aumenta. ¿A qué precio la oferta será igual a la demanda, es decir, a qué precio será d=s?. En teoría económica, el precio al que la oferta es igual a la demanda se llama punto de equilibrio-es el punto donde el precio deja de cambiar. R: Bsf. 2

Tema 4: Inecuaciones.

Desigualdad: es una expresión matemática que indica si un valor es mayor o menor que otro.

Antes de continuar investiga sobre las PROPIEDADES de LA DESIGUALDAD

Intervalos: son subconjuntos de los números reales. Estos pueden ser:

- Cerrados: contiene los extremos del intervalo. Es decir:

$$A = \{x \in R / a \leq x \leq b\} = [a, b]$$

- Abiertos: no contienen los extremos del intervalo. Es decir:

$$A = \{x \in R / a < x < b\} = (a, b)$$

- Semi-cerrados (o semi-abiertos): contiene a uno de los extremos: Por ejemplo:

$$A=\{x\in R/a\le x<b\}=[a,b)$$

- Extendidos: uno de los extremos es infinito (o infinito negativo). Por ejemplo:

$$A=\{x\in R/x>a\}=(a,\infty)$$

Inecuaciones: Son desigualdades con una o más variables. Su solución consiste en determinar los valores de la variable que satisfacen la inecuación.

En esta cátedra resolveremos inecuaciones de una variable.

Pasos para resolver inecuaciones algebraicas:

I) Si es una inecuación lineal, es decir, de 1er grado:

Se despeja la variable y se escribe el intervalo solución que corresponde.

Ejemplo 1:

$$3(x+2)^2-(x+1)(x-4)\le 2x(x-3)+25x-2$$

Se desarrollan los productos

$$3x^2+12x+12-x^2+3x+4\le 2x^2-6x+25x-2$$

Se agrupan los términos semejantes

Observa que los términos con x^2 se simplificaron por

$$12x + 3x + 6x - 25x \leq -2 - 12 - 4$$

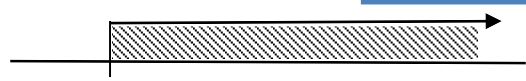
$$-4x \leq -18$$

$$x \geq \frac{-18}{-4}$$

Se despeja la variable y se simplifica.

Observa que el sentido de la desigualdad cambia cuando se multiplica por un factor negativo.

$$x \geq \frac{9}{2}$$



9/2

$$x \in \left[\frac{9}{2}, \infty\right)$$

Ubica la solución en la recta real y Escribe el intervalo solución

II) Si es una inecuación no lineal, pero racional

Sigue los Pasos:

Paso 1:

Se expresa la inecuación de la forma P(x)≥0 (O P(x)>0, P(x)<0, P(x) ≤ 0 según el caso)

Paso 2:

Se factoriza y se identifica sus raíces reales. (Si es un cociente se factoriza tanto numerador como denominador).

Paso 3:

Se ubican las raíces reales en la recta real. Identifique sobre la recta si la raíz es el extremo de un intervalo abierto o cerrado.

IMPORTANTE:

Las soluciones del denominador siempre son intervalo abierto, no pueden ser incluidas ya que la división

Paso 4:

Determine el signo de cada intervalo usando un valor de prueba cualquiera de la recta real (que sea distinto a las raíces obtenidas) y sustituyéndola en P(x).

Nota: los signos de cada intervalo se alternan a menos que alguna raíz sea de multiplicidad par.

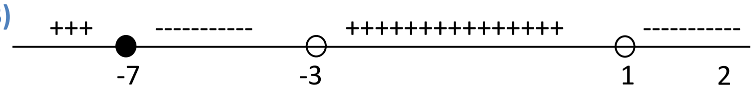
La solución es la unión de los intervalos (positivos o negativos) que satisfacen a la inecuación.

Ejemplo 2: $\dfrac{1}{x+3} \geq \dfrac{2}{x-1}$

(Paso 1) $\dfrac{1}{x+3} - \dfrac{2}{x-1} \geq 0 \rightarrow \dfrac{x-1-2x-6}{(x+3)(x-1)} \geq 0 \rightarrow \dfrac{-x-7}{(x+3)(x-1)} \geq 0$

(Paso 2) $\begin{cases} \text{Num:} & \text{Den:} \\ \text{x=-7} & \text{x} \neq \text{-3}, \ \text{x} \neq 1 \end{cases}$

(Paso 3)



(Paso 4: sustituyo un valor de prueba, ej. X=2, en la inecuación factorizada y analizo el signo)

Solución: $x \in (-\infty, -7] \cup (-3, 1)$

Ejemplo 3: $\dfrac{x^3-2x^2+x}{x^4-16} \leq 0$

$$\frac{x(x-1)^2}{(x-2)(x+2)(x^2+4)} < 0 \quad \begin{cases} \text{Num: } x \neq 0,\ x \neq 1 \text{ (raíz par)} \\ \text{Den: } x \neq 2,\ x \neq -2 \end{cases}$$

------ ++++++++++ --------- --------- ++++++

-2 0 1 2

Identifica que se realizó en cada paso y responde:

- ¿Qué paso en x=1 en la recta real?, ¿por qué?
- ¿Por qué parece que no se tomó en cuenta el factor (x^2+4)?

Solución: $x \in (-\infty,-2) \cup (0,1) \cup (1,2)$

Responde las siguientes preguntas para cada una de las inecuaciones que se presentan:

Antes de resolver:

- ¿Qué tipo de expresión algebraica conforma está inecuación?
- En la solución, ¿qué intervalos debes seleccionar?
- ¿Cuál es el denominador de los miembros en la inecuación?
- ¿Tiene raíces en el denominador?
- ¿Incluyes a las raíces del denominador? ¿Por qué?

Durante la resolución:

- ¿Cuáles propiedades de las desigualdades usaste para resolver la inecuación?
- ¿Es posible cambiar los denominadores al otro miembro de la inecuación multiplicando? ¿Por qué?
- ¿En algún momento tuviste que cambiar el sentido de la inecuación? ¿Por qué?
- Durante la resolución aparecieron productos notables ¿Cuáles?
- Tuviste que factorizar para resolver la inecuación, ¿Qué factorizaciones usaste?

- ¿Encontraste alguna raíz doble? ¿Cuál?
- ¿Qué significa esa raíz doble?
- ¿En cuáles intervalos queda dividida la recta real o eje x?
- Evalúa y selecciona los intervalos que satisfacen la inecuación

Después de la resolución:

- ✓ ¿Cómo sabes que la solución es la correcta?
- ✓ ¿Qué piensas que pasará si cambias el sentido a la inecuación que intervalos seleccionas?
- ✓ ¿Podría existir una inecuación cuya respuesta sea todos los números reales? Da un ejemplo
- ✓ ¿Podría existir una inecuación cuya respuesta sea el conjunto vacío? Da un ejemplo

Ejercicios:

1. $x+3 \geq 2(x+1)$ Sol: $x \in (-\infty, 1]$
2. $x^3-(x+2)^3 > -(\sqrt{6}\,x-1)^2$ Sol: $x \in \left(-\infty, -\dfrac{7}{2(\sqrt{6}+6)}\right)$
3. $\dfrac{3x^2}{2}+\dfrac{(x-1)^2}{2} \leq 2x^2+\dfrac{x+1}{4}$ Sol: $x \in \left[\dfrac{1}{5}, \infty\right)$
4. $x^2 > 16$ Sol: $x \in (-\infty, -4) \cup (4, \infty)$
5. $x^2 \leq 8$ Sol: $x \in [-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}]$
6. $x^4 + x^2 \leq x^3$ Sol: $\{0\}$
7. $12x^3 - 4x^2 < 3x - 1$ Sol: $x \in \left(-\infty, -\dfrac{1}{2}\right) \cup \left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{2}\right)$
8. $27x^3 - 9x^2 - 3x + 1 \geq 0$ Sol: $x \in \left[-\dfrac{1}{3}, \infty\right)$
9. $8x^3 + 4x^2 - 2x - 1 \geq 0$ Sol: $x \in \left\{-\dfrac{1}{2}\right\} \cup \left[\dfrac{1}{2}, \infty\right)$
10. $\dfrac{2x^3-x+1}{x^3+2x^2+x-4} \geq 0$ Sol: $x \in (-\infty, -1] \cup (1, \infty)$
11. $\dfrac{2x^4-x^3-35x^2-47x-15}{x^5+2x^4-x-2} \leq 0$ Sol: $x \in (-\infty,-3] \cup (-2,-1) \cup (-1,-½] \cup (1,5]$
12. $x^3 \geq \dfrac{7x^2-x-6}{x-1}$ Sol: $x \in [-2, -1] \cup [3, \infty)$
13. $\dfrac{x-2}{x-4} \geq \dfrac{x+2}{x}$ Sol: $x \in (-\infty, 0) \cup (4, \infty)$
14. $x^2 \geq 5x - 6 < 2x^2 - 4$ Sol: $x \in (-\infty, ½) \cup [3, \infty)$

15. $-2{,}5x + 0{,}5 \geq -3x + 2 \leq 0{,}5x - 0{,}2$ Sol: $x \in [3 , \infty)$

16. $\frac{x}{x^2-1} + 3 \leq \frac{1}{x-1} - \frac{x}{x+1}$ Sol: $x \in \left(-1, \frac{1-\sqrt{65}}{8}\right] \cup \left(1, \frac{1+\sqrt{65}}{8}\right]$

17. $2x^4 - x^3 - 35x^2 - 47x - 15 \leq 0$ Sol: $x \in [-3,-1] \cup \left[-\frac{1}{2}, 5\right]$

18. $\frac{a}{x} \leq \frac{x}{a}$ siendo $a < 0$ Sol: $x \in (-\infty , a] \cup (0 , -a]$

19. $\frac{x-a}{x-2a} < \frac{x+a}{x}$ siendo $a < 0$ Sol: $x \in (2a , 0)$

20. $x^2 + 6x - 6 \geq 1$ Sol: $x \in [1,\infty) \cup (-\infty,-7]$

21. $4x^2 + 2x + 3 > 0$ Sol: $\mathbb{R}$

22. $\frac{1}{x^2+1} \geq 0$, Sol: $\mathbb{R}$

23. $x^2 - 6x \leq -9$, Sol: x=3

24. $\frac{2}{x-1} - \frac{1}{x} \leq \frac{1}{x^2-x}$, Sol: $(-\infty,1)$

25. $x^4 + 11x^2 + 7x - 12 > 7x^3$, Sol: $x \in (1,3) \cup (-\infty,-1) \cup (4,\infty)$

26. $\frac{2}{x-1} - \frac{8}{x^2-1} < \frac{2}{x+1}$, Sol: $x \in (-\infty,-1) \cup (1,\infty)$

27. $\frac{3x}{5} - \frac{(x+1)^2}{4} \geq \frac{x}{5}$, No tiene solución

28. $x^4 - 8x - 4 \geq 3x^2 - 2x^3$ Sol: $x \in (-\infty,-2] \cup \{-1\} \cup [2,\infty)$

Los siguientes ejercicios están resueltos de manera incorrecta. Identifique el error y resuelva correctamente.

a) Resolver la inecuación $\dfrac{x-1}{x+2} \geq 0$.

Restricción: x-1 $\geq$ 0 y x+2 > 0.

Luego: x $\geq$ 1 , $x \in [1,\infty)$

x > -2 , $x \in (-2,\infty)$

De la intersección de ambas soluciones resulta : $x \in [1,\infty)$

b) Resolver la inecuación $\dfrac{x}{x+3} - 2 \geq 0$

Enunciado: $\dfrac{x}{x+3} - 2 \geq 0$

Resuelvo: $\dfrac{x}{x+3} \geq 2 \quad \rightarrow \quad x \geq 2x+6 \quad \rightarrow \quad -x \geq 6 \rightarrow \quad x \leq -6$

Luego: $x \in (-\infty,-6]$

Tema 5: Sistema de ecuaciones lineales y no lineales (2 ecuaciones con dos incógnitas)

Dos ecuaciones con dos incógnitas forman un sistema, cuando lo que pretendemos de ellas es encontrar su solución común.

$a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1$

$a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2$

La solución de un sistema es un par de números x_1, y_1, tales que reemplazando x por x_1 e y por y_1, se satisfacen a la vez ambas ecuaciones.

Revisemos tres métodos para resolver sistema de ecuaciones (dos ecuaciones con dos incógnitas)

Método de sustitución:

1. Se despeja una incógnita en una de las ecuaciones.
2. Se sustituye la expresión de esta incógnita en la otra ecuación, obteniendo una ecuación con una sola incógnita.
3. Se resuelve la ecuación.
4. El valor obtenido se sustituye en la ecuación en la que aparecía la incógnita despejada.
5. Los dos valores obtenidos constituyen la solución del sistema.

Ejemplo:

$3x-4y=-6$

$2x+4y=16$

1. Despejamos una de las incógnitas en una de las dos ecuaciones. Elegimos la incógnita que tenga el coeficiente más bajo.

$2x = 16 - 4y$ $\qquad x = 8 - 2y$

2. Sustituimos en la otra ecuación la variable x, por el valor anterior

$3(8 - 2y) - 4y = -6$

3. Resolvemos la ecuación obtenida

$24 - 6y - 4y = -6$ $\qquad -10y = -30$ $\qquad y = 3$

4. Sustituimos el valor obtenido en la variable despejada

$x = 8 - 2 \cdot 3 = 8 - 6$ $\qquad x = 2$

5. Solución

$x = 2, \ y = 3$

Método de Igualación

1. Se despeja la misma incógnita en ambas ecuaciones.

2. Se igualan las expresiones, con lo que obtenemos una ecuación con una incógnita.

3. Se resuelve la ecuación.

4. El valor obtenido se sustituye en cualquiera de las dos expresiones en las que aparecía despejada la otra incógnita.

5. Los dos valores obtenidos constituyen la solución del sistema.

Ejemplo:

$$\begin{cases} 3x - 4y = -6 \\ 2x + 4y = 16 \end{cases}$$

1. Despejamos, por ejemplo, la incógnita **x** de la primera y segunda ecuación

$$3x = -6 + 4y \qquad x = \frac{-6 + 4y}{3}$$

$$2x = 16 - 4y \qquad x = \frac{16 - 4y}{2}$$

2. Igualamos ambas expresiones

$$\frac{-6 + 4y}{3} = \frac{16 + 4y}{2}$$

3. Resolvemos la ecuación

$$2(-6 + 4y) = 3(16 - 4y) \qquad -12 + 8y = 48 - 12y$$

$$8y + 12y = 48 + 12 \qquad 20y = 60 \qquad y = 3$$

4. Sustituimos el valor de **y**, en una de las dos **expresiones** en las que tenemos **despejada la x**

$$x = \frac{-6 + 4 \cdot 3}{3} = \frac{-6 + 12}{3} \qquad x = 2$$

5. Solución

$$x = 2, \quad y = 3$$

Método de Reducción

1. Se preparan las dos ecuaciones, multiplicándolas por los números que convenga.

2. La restamos, y desaparece una de las incógnitas.

3. Se resuelve la ecuación resultante.

4. El valor obtenido se sustituye en una de las ecuaciones iniciales y se resuelve.

5. Los dos valores obtenidos constituyen la solución del sistema.

Ejemplo:

$$\begin{cases} 3x - 4y = -6 \\ 2x + 4y = 16 \end{cases}$$

Lo más fácil es suprimir la y, de este modo no tendríamos que preparar las ecuaciones; pero vamos a optar por suprimir la x, para que veamos mejor el proceso.

$$\begin{cases} 3x - 4y = -6 \xrightarrow{x2} \\ 2x + 4y = 16 \xrightarrow{x(-3)} \end{cases} \begin{cases} 6x - 8y = -12 \\ -6x - 12y = -48 \end{cases}$$

Restamos y resolvemos la ecuación:

$$\begin{cases} \cancel{6x} - 8y = -12 \\ \underline{\cancel{-6x} - 12y = -48} \end{cases}$$
$$-20y = -60 \qquad y = 3$$

Sustituimos el valor de y en la segunda ecuación inicial.

$$2x + 4 \cdot 3 = 16 \qquad 2x + 12 = 16 \qquad 2x = 4 \qquad x = 2$$

Solución:

$$x = 2, \ y = 3$$

Ejercicios para practicar:

1) $\begin{cases} 2x + 3y = -1 \\ 3x + 4y = 0 \end{cases}$, R: x=4,y=-3

2) $\begin{cases} 4x - 3y = 8 \\ 3x + 2y = 23 \end{cases}$ R: x=5,y=4

2) $\begin{cases} \frac{x+3y}{2} = 5 \\ 3x - y = 5y \end{cases}$ R: x=4,y=2

3) $\begin{cases} \frac{x+3y}{2} = 5 \\ 4 - \frac{2x-y}{2} = 1 \end{cases}$ R: x=4,y=2

4) $\begin{cases} x + y = 60 \\ 16x + 20y = 1100 \end{cases}$ R: x=25,y=35

5) $\begin{cases} \frac{1}{2}(x-y) + \frac{2}{3}(x-2y) = 2y+2 \\ \\ \frac{5}{4}(3x+1) - \frac{5}{2}(x+y) = 2y+3 \end{cases}$ R: x=5,y=1

6) $\begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{7}{10}y = \frac{5-2y}{10} + \frac{6}{5} \\ \\ \frac{3}{8}x + \frac{3}{4}y - \frac{5}{4} = \frac{x+y}{4} \end{cases}$, R: x= -2, y=3

7) *Oferta y demanda*. La cantidad de un producto que se espera que las personas puedan comprar en un determinado día depende generalmente de su precio. En forma similar, la cantidad de un producto que se espera que pueda vender un proveedor en ese día depende también del precio. En un día de cierta ciudad, la demanda (d) en kilogramos de cerezas al precio de "p" BsF por gramo se obtiene de

$$d = 4000 - 44p \qquad\qquad 10 \le p \le 90$$

La oferta (s) se calcula mediante

$$s = -1340 + 134\,p \qquad\qquad 10 \le p \le 90$$

Análisis: Al emplear estas ecuaciones, se ve que a BsF 20 por kilogramo se espera que la gente compre 3120 kilogramos de cerezas, mientras que el proveedor sólo espera vender 1340 kilogramos. En consecuencia, la demanda excede a la oferta, y el precio aumentará. Por otra parte, si el precio fuera BsF 50 por kilogramo, entonces el proveedor esperaría vender 5360 kilogramos y la gente sólo podría comprar 1800 kilogramos. Por lo tanto, la oferta excede a la demanda a ese precio y éste tendrá que disminuir. ¿A qué precio se estabilizarán las cerezas en ese día; es decir, a qué precio la oferta es igual a la demanda?

Recomendaciones:

a. Grafica las ecuaciones de oferta y demanda en un sistema de coordenadas, el punto donde se cortan representa el punto de equilibrio.

b. Resuelve el sistema por cualquiera de los métodos practicados para hallar de forma más precisa el punto de equilibrio. R: BsF.30

c. Interpreta la gráfica.

8) Con frecuencia, la gente se encuentra ante situaciones de "mezcla de emociones". Por ejemplo, hablar en público a menudo produce la respuesta positiva de reconocimiento y la respuesta negativa de fracaso. ¿Cuál es la que domina? En un experimento sobre acercamiento y evitación, J.S.Brown entrenó ratas alimentándolas mediante una caja objetivo. Después, las ratas recibieron choques eléctricos suaves de la misma caja objetivo. Esto produjo un conflicto de acercamiento y evitación con relación a la caja. Utilizando un aparato adecuado, Brown llegó a las siguientes relaciones:

$$p = -\frac{1}{5}d + 70; \quad a = -\frac{4}{3} + 230; \qquad 30 \leq d \leq 175.$$

Aquí, "p" es la fuerza en gramos hacia la caja de alimento, cuando la rata está situada a "d" centímetros de ella. La cantidad "a" es la fuerza en gramos para retirarse (evitar) la caja que le produce choques eléctricos, cuando la rata está situada "a" de centímetros de ella.

a. Construya la gráfica de las dos ecuaciones anteriores en el mismo sistema de coordenadas.

b. Encuentra el punto de equilibrio p=a

c. ¿Qué piensa usted que haría la rata cuando está situada a la distancia "d" de la caja, que se calculó en la parte b?

9) Un concierto de jazz produjo BsF 60000 millones por la venta de 8000 boletos. Si los boletos se vendieron a BsF 6 millones y BsF 10 millones cada uno, ¿cuántos boletos de cada tipo se vendieron?
R: $3000\ boletos\ de\ 10\ y\ 5000\ boletos\ de\ 6$

Sistemas no lineales:

Un sistema de ecuaciones es no lineal, cuando al menos una de sus ecuaciones no es de primer grado.

Ejemplo: $\begin{cases} x^2+y^2=25 \\ x+y=7 \end{cases}$ La resolución de estos sistemas se suele hacer por el método de sustitución, para ello seguiremos los siguientes pasos:

- Se despeja una incógnita en una de las ecuaciones, preferentemente en la de primer grado
$$y=7-x$$
- Se sustituye el valor de la incógnita despejada en la otra ecuación
$$x^2+(7-x)^2=25$$
- Se resuelve la ecuación resultante
$$x^2+49-14x+x^2 \quad =25$$
$$2x^2-14x \quad +24=0$$
$$x^2-7x \quad +12=0$$
$$x=\frac{7\pm\sqrt{49-48}}{2}=\frac{7\pm 1}{2}=x_1=4 \qquad x_2=3$$
- Cada uno de los valores obtenidos se sustituye en la otra ecuación, se obtienen así los valores correspondientes de la otra incógnita
$$x=3 \qquad y=7-3 \qquad y=4$$
$$x=4 \qquad y=7-4 \qquad y=3$$

Ejercicios para practicar:

1) $\begin{cases} x+y=7 \\ x.y=12 \end{cases}$ R: [x=3,y=4],[x=4,y=3]

2) $\begin{cases} x^2+y^2=169 \\ x+y=17 \end{cases}$ R: [x=5,y=12],[x=12,y=5]

3) $\begin{cases} y^2-2y+1=x \\ \sqrt{x}+y=5 \end{cases}$ R: [x=4,y=3]

4) $\begin{cases} \frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=13 \\ \frac{1}{x}-\frac{1}{y}=1 \end{cases}$ R: [x=-(1/2),y=-(1/3)],[x=1/3,y=1/2]

5) El producto de dos números positivos es 4, y la suma de sus cuadrados 17 ¿Cuáles son esos números? R : [x=4, y=1]

6) Halle una fracción equivalente a 5/7 cuyos términos elevados al cuadrado sumen 1184
R: [x=-28, y=-20] o [x=28,y=20]

Bibliografía

http://www.vitutor.com/ecuaciones/2/ecu2_Contenidos_e.html

http://www.ciens.ula.ve/matematica/publicaciones/guias/servicio_docente/maria_victoria/ecuaciones.pdf

Matemáticas para administración y ciencias sociales. R.A. Barnett. Interamericana. Méjico 1988.

Matemáticas para administración y economía. Ernest F. Haeussler, Jr; Richard S. Paul; Richard J. Wood. Ed. Pearson. Prentice Hall. 2008.