ELABORADA POR LA PROF.
CORDELIA KHOURI

Expresiones Algebraicas III: Racionalización

Racionalizar una expresión algebraica consiste en sustituir la expresión radical (bien sea en el numerador o denominador) por una expresión equivalente, de tal manera que se elimine la parte radical del numerador o denominador transformándolo en una expresión racional. Se realiza por medio de multiplicaciones y basado en las operaciones con radicales y productos notables se transforma en una expresión racional (es decir, sin radicales). Es importante destacar que, al racionalizar, no se elimina la expresión radical de la fracción, solo 'se muda'.

¡Para este tema es importante repasar las propiedades y operaciones con radicales visto en Operaciones con Números Reales!

Racionalización de Monomios:

Observe los siguientes ejemplos:

Ejemplo 1:

Racionalice la siguiente expresión:

$$\frac{z^2 - x^2}{\sqrt{xz}} =$$

$$\frac{z^2 - x^2}{\sqrt{xz}} = \frac{z^2 - x^2}{\sqrt{xz}} \cdot \frac{\sqrt{xz}}{\sqrt{xz}} = \frac{(z^2 - x^2)\sqrt{xz}}{\left(\sqrt{xz}\right)^2} = \frac{(z^2 - x^2)\sqrt{xz}}{xz}$$

Al simplificar la raíz se transforma el denominador en una expresión racional (sin raíz) y esta se 'muda' al numerador

Multiplicamos por una fracción que no altere la expresión original. Como el objetivo es Racionalizar el denominador se multiplica por la Raíz del **mismo índice** de tal manera que la cantidad subradical quede elevado al mismo índice de la raíz y se simplifique.

Ejemplo 2:

Racionalice el numerador y simplifique $\frac{\sqrt[5]{a^2b^3c}}{a^2b-ab^2c}$

Recuerda que al multiplicar radicales del mismo índice se multiplican los **factores** de la cantidad subradical. Revisa las propiedades de potenciación

$$\frac{\sqrt[5]{a^2b^3c}}{a^2b-ab^2c}=\frac{\sqrt[5]{a^2b^3c}}{a^2b-ab^2c}\cdot\frac{\sqrt[5]{a^3b^2c^4}}{\sqrt[5]{a^3b^2c^4}}=\frac{\sqrt[5]{a^5b^5c^5}}{\underbrace{ab(a-bc)}\sqrt[5]{a^3b^2c^4}}=\frac{abc}{\cancel{ab}(a-bc)\sqrt[5]{a^3b^2c^4}}=\frac{c}{(a-bc)\sqrt[5]{a^3b^2c^4}}$$

Observa que multiplicamos por una raíz del mismo índice. **¿Qué observas en los exponentes? ¿Si la raíz fuese de índice 7, cuáles deberían ser los exponentes de cada factor para eliminar la raíz?**

¿Qué operación se realizó en esta expresión?

Finalmente se simplifican los factores iguales.

Ejemplo 3:

Racionalice el denominador y simplifique $\frac{x^2-4y^2}{\sqrt[3]{x-2y}}$

¿Qué operación se aplicó aquí?

$$\frac{x^2-4y^2}{\sqrt[3]{x-2y}}=\frac{x^2-4y^2}{\sqrt[3]{x-2y}}\cdot\frac{\sqrt[3]{(x-2y)^2}}{\sqrt[3]{(x-2y)^2}}=\frac{\overbrace{(x-2y)(x+2y)}\sqrt[3]{(x-2y)^2}}{\sqrt[3]{(x-2y)^3}}=$$

$$=\frac{(x-2y)(x+2y)\sqrt[3]{(x-2y)^2}}{x-2y}=(x+2y)\sqrt[3]{(x-2y)^2}$$

Como puedes elevar a la potencia a los **factores y no a los términos,** se toma el **factor** (x-2y)

Racionalización de Binomios:

Revisa estos casos de factorización para este tema:
- Diferencia de cuadrados.
- Diferencia de cubos.
- Suma de cubos.

Para eliminar los radicales de los términos de un binomio, es necesario multiplicar el binomio por su conjugado de tal manera que cada término quede elevado a la potencia que simplifique el radical.

Para Binomios con raíces cuadradas:

$(a-b).(a+b) = a^2-b^2$

Si a y/o b son raíces cuadradas, al multiplicar por el factor que completa la diferencia de cuadrados nos queda cada término al cuadrado, eliminando la raíz cuadrada

Para Binomios con raíces cúbicas:

$$(a-b).(a^2+ab+b^2) = a^3-b^3$$

$$(a+b).(a^2-ab+b^2) = a^3+b^3$$

Si a y/o b son raíces cúbicas, al multiplicar por el factor que completa la diferencia de cubos o la suma de cubos, según el caso nos queda cada término al cubo, eliminando la raíz cúbica

Observe los siguientes ejemplos:

Ejemplo 1:

Racionalice el denominador de la siguiente expresión y simplifique si es posible:

$$\frac{3x^2-x-2}{\sqrt{2x^2-1}-\sqrt{4x-3}}$$

Aplicamos la conjugada correspondiente a la raíz cuadrada

¿Qué operación se aplicó aquí?

$$\frac{3x^2-x-2}{\sqrt{2x^2-1}-\sqrt{4x-3}}\cdot\frac{\sqrt{2x^2-1}+\sqrt{4x-3}}{\sqrt{2x^2-1}+\sqrt{4x-3}}=\frac{(3x+2)(x-1)\left(\sqrt{2x^2-1}+\sqrt{4x-3}\right)}{2x^2-1-4x+3}$$

Multiplicamos por la conjugada. Observa que la expresión conjugada es idéntica excepto por el signo

Al multiplicar por la conjugada en el denominador queda

$$\left(\sqrt{2x^2-1}\right)^2-\left(\sqrt{4x-3}\right)^2$$

De esta forma se cancelan los radicales.
¿Qué pasó con el signo de 3?

$$=\frac{(3x+2)(x-1)\left(\sqrt{2x^2-1}+\sqrt{4x-3}\right)}{2x^2-4x+2}=\frac{(3x+2)(x-1)\left(\sqrt{2x^2-1}+\sqrt{4x-3}\right)}{2(x^2-2x+1)}=$$

¡Seguro puedes identificar en cada paso las operaciones realizadas!

$$=\frac{(3x+2)(x-1)\left(\sqrt{2x^2-1}+\sqrt{4x-3}\right)}{2(x-1)^2}=\frac{(3x+2)\left(\sqrt{2x^2-1}+\sqrt{4x-3}\right)}{2(x-1)}$$

Ejemplo 2:

Racionalice el numerador de la siguiente expresión y simplifique si es posible

$\dfrac{\sqrt[3]{3x+2}-2}{x^2-4}$ Aplicamos la conjugada correspondiente a la raíz cúbica

Al multiplicar por la conjugada en el denominador queda

$$\left(\sqrt[3]{3x+2}\right)^3-(2)^3$$

De esta forma se cancelan los radicales.

¡No olvides elevar ambos términos!

Aunque no tenga radicales como el 2

$$\frac{\sqrt[3]{3x+2}-2}{x^2-4}\cdot\frac{\left(\sqrt[3]{3x+2}\right)^2+2\sqrt[3]{3x+2}+2^2}{\left(\sqrt[3]{3x+2}\right)^2+2\sqrt[3]{3x+2}+2^2}=\frac{3x+2-8}{(x+2)(x-2)\left(\left(\sqrt[3]{3x+2}\right)^2+2\sqrt[3]{3x+2}+4\right)}=$$

$$=\frac{3x-6}{(x+2)(x-2)\left(\left(\sqrt[3]{3x+2}\right)^2+2\sqrt[3]{3x+2}+4\right)}=\frac{3(x-2)}{(x+2)(x-2)\left(\left(\sqrt[3]{3x+2}\right)^2+2\sqrt[3]{3x+2}+4\right)}=$$

$$=\frac{3}{(x+2)\left(\left(\sqrt[3]{3x+2}\right)^2+2\sqrt[3]{3x+2}+4\right)}$$

¡Aquí también puedes identificar en cada paso las operaciones realizadas!

Prueba lo siguiente:
Sustituye el valor x=2 en la expresión original y calcula. ¿Cuál fue el resultado?
Ahora sustituye el valor x=2 en la expresión simplificada después de racionalizar y calcula. ¿Te dio 1/16? ¡Excelente!

Eso sucede porque al racionalizar pudimos simplificar el factor (x-2)

Ejemplo 3:

Simplifica la siguiente expresión y calcula el valor resultante para x=1

$$\frac{\sqrt[3]{5x-4}-\sqrt[3]{2-x}}{\sqrt{2x-1}-1}$$

$$\frac{\sqrt[3]{5x-4}-\sqrt[3]{2-x}}{\sqrt{2x-1}-1}\cdot\frac{\left(\sqrt[3]{5x-4}\right)^2+\sqrt[3]{5x-4}\sqrt[3]{2-x}+\left(\sqrt[3]{2-x}\right)^2}{\left(\sqrt[3]{5x-4}\right)^2+\sqrt[3]{5x-4}\sqrt[3]{2-x}+\left(\sqrt[3]{2-x}\right)^2}\cdot\frac{\sqrt{2x-1}+1}{\sqrt{2x-1}+1}=$$

Se aplica doble conjugada. Una correspondiente al numerador y otra correspondiente al denominador.
Se simplifica y el factor 'sobrante' de la conjugada 'se queda multiplicando.

$$=\frac{(5x-4-2+x)}{(2x-1-1)}\cdot\frac{\sqrt{2x-1}+1}{\left(\sqrt[3]{5x-4}\right)^2+\sqrt[3]{5x-4}\sqrt[3]{2-x}+\left(\sqrt[3]{2-x}\right)^2}=$$

Dejaré que continúes el ejercicio con lo aprendido. **¿Cuánto te da la simplificación?** Compara la respuesta con tus compañeros.
Al sustituir x=1 después de simplificar da 2

¡Ahora practica!

Racionaliza las siguientes expresiones y simplifica el resultado si es posible:

a) $\frac{7}{\sqrt{63}}$

b) $\frac{1}{\sqrt{75}}$

c) $\frac{\sqrt{45}}{\sqrt{6x^3}}$

d) $\frac{1}{\sqrt{2}\,\sqrt[5]{a^3}\,\sqrt[3]{b^2}}$

e) $\frac{b+2}{\sqrt{b^2-4}}$

f) $\frac{1-\sqrt{5}}{3}$

g) $\frac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}$

h) $\frac{w^2+4}{\sqrt[3]{w+2}}=$

i) $\frac{\left(\sqrt{5}+x\right)+1}{\sqrt{5}+x}$

j) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{27}}=$

k) $\dfrac{z^2-49}{\sqrt{z+7}}$

l) $\dfrac{\sqrt{s-8}+\sqrt{s+8}}{\sqrt{s-8}-\sqrt{s+8}}$

m) $\dfrac{3x-5}{\sqrt{8z}-\sqrt{z+1}}$

n) $\dfrac{5x}{\sqrt{3x}-2\sqrt{x}}$

o) $\dfrac{\sqrt{11}+\sqrt{3}}{4\sqrt{11}-2}$

p) $\dfrac{3+\sqrt{w+1}}{3-\sqrt{w+1}}$

q) $\dfrac{2\sqrt{3}-3\sqrt{5}}{2\sqrt{3}+3\sqrt{5}}=$

r) $\dfrac{z-31}{\sqrt{z+5}+6}=$

s) $\dfrac{\sqrt{x+6}+2}{\sqrt{x-6}-2}=$

t) $\dfrac{a-b}{\sqrt{a-5}+\sqrt{b-5}}$

u) $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$

v) $\dfrac{131-a}{5-\sqrt[3]{a-6}}=$

w) $\dfrac{w^2-29w-30}{7-\sqrt{w+19}}=$

x) $\dfrac{x^2-2x-48}{\sqrt{x}-\sqrt{8}}$

y) $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$

z) $\dfrac{1}{\sqrt{a+\sqrt{a^2-b^2}}}$

aa) $\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{x+h}}{h\sqrt{x}\sqrt{x+h}}$

bb) $\dfrac{16z^2-81}{\sqrt{6z^2+7}+\sqrt{2-2z^2}}$

cc) $\dfrac{3w-4}{\sqrt{4w-1}-\sqrt{w+3}}$

dd) $\dfrac{\sqrt{x^2+3x}}{\sqrt[3]{x^3-4}}$

ee) $\dfrac{\sqrt[3]{x^2+4}-x}{x^4-16}$

ff) $\dfrac{x^2-\sqrt{a^3x}}{\sqrt{ax}-a}$

gg) $\sqrt[3]{x^3+x^2}-x$

hh) $\sqrt{x^2+x-2}-\sqrt{x^2+2x-6}$

ii) $\dfrac{4-x^2}{3-\sqrt{x^2+5}}$

jj) $\dfrac{\sqrt[3]{8x}-2}{\sqrt{x^3}-\sqrt{x}}$

kk) $\dfrac{\sqrt[3]{1+cx}-1}{x}$

ll) $\dfrac{\sqrt{6-x}-2}{\sqrt{3-x}-1}$

mm) $\sqrt{x^3+ax^2+b}-\sqrt{x^3+cx+d}$

nn) $\dfrac{(y-4)^2}{\sqrt{3y^2-8y+16}-\sqrt{2y^2+2y-9}}$