Radiación y Ondas Guiadas

UNIVERSIDAD CATÓLICA ANDRÉS BELLO

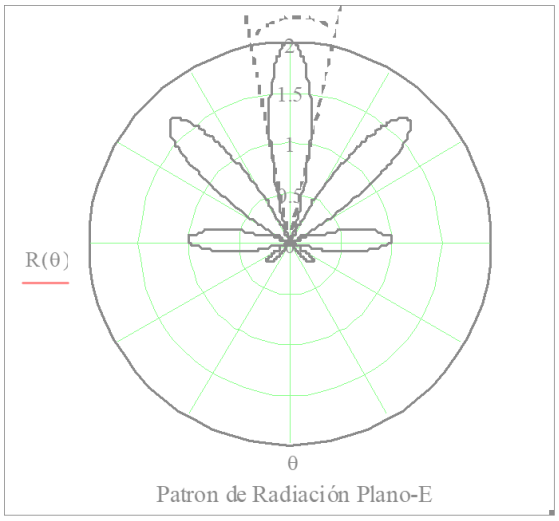
FACULTAD DE INGENIERÍA

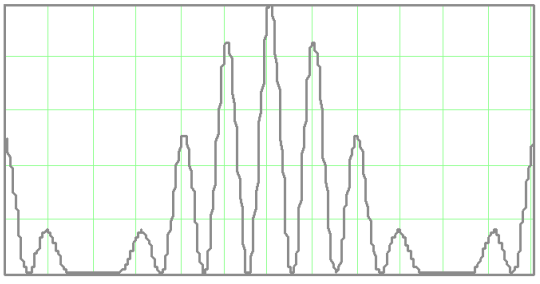
ESCUELA DE INGENIERÍA DE

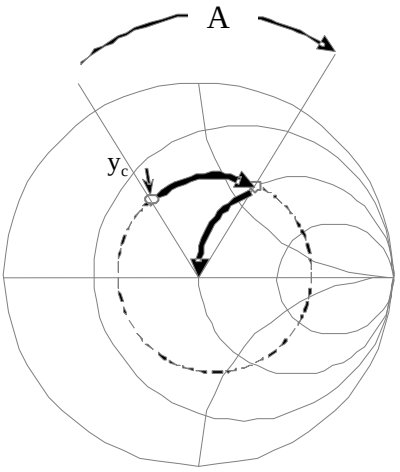
TELECOMUNICACIONES

PROF. LUIS JACINTO FERNÁNDEZ

noviembre de 2022







Prefacio

La siguiente obra está dirigida a los estudiantes de la Universidad Católica Andrés Bello y está adaptada al contenido de la asignatura Radiación y Ondas Guiadas, ubicada en el séptimo semestre de la Carrera de Ingeniería de Telecomunicaciones. Sin embargo, también puede ser de utilidad para alumnos de otras universidades que estén cursando Ondas Guiadas o como una breve introducción a Antenas. El texto sólo existe en formato electrónico y está en permanente revisión, no sólo para corregir posibles errores sino porque se agregan constantemente nuevos ejercicios y ejemplos.

Debe aclararse que una obra como ésta no contiene material ciento por ciento originales, ya que se trata de conceptos de dominio público y que han sido tratados ampliamente en la literatura, en los libros clásicos de electromagnetismo. Lo que sí es innovador es la forma como se presenta dicho material al lector. Adicionalmente, los problemas numéricos y algunas secciones como las referidas a la solución computacional de las líneas de transmisión si son de mi exclusiva autoría.

Luis Fernández

RADIACIÓN Y ONDAS GUIADAS

UNIVERSIDAD CATÓLICA ANDRÉS BELLO

FACULTAD DE INGENIERÍA

ESCUELA DE INGENIERÍA DE TELECOMUNICACIONES

PROF. LUIS JACINTO FERNÁNDEZ

Capítulo I 1
Conceptos Fundamentales 1
1-1. Introducción. 1
1-2. Las ecuaciones básicas 6
1-3. Relaciones Constitutivas 8
1-4. El Concepto de Corriente Generalizada 9
1-5. Energía y Potencia 10
1-6. Solución de las ecuaciones de Maxwell. 13
1-6.1 Ondas viajeras en el espacio libre. 13
1-6.2 Ondas viajeras en medios lineales simples 19
1-7. Potenciales Eléctrico y Magnético. Potenciales retardados. 21
1-8. Ecuaciones de Maxwell sobre una trayectoria. Teoría de rayos. 27
1-9 Variaciones sinusoidales. Ecuaciones complejas. 30
1-9.1 Vector de Poynting complejo 36
1-10. Polarización de las ondas electromagnéticas. 39
1-11. Representación genérica de ondas planas 43
1-11.1 Radioenlaces 44
1-11.2Propagación en medio no homogéneos. 46
1-12. Propagación en medios con pérdidas y en medios lineales generales 49
Capítulo 2. Reflexión y Refracción de Ondas Planas 54
2-1. Comportamiento de las ondas en la interfaz entre medios. Reflexión y Refracción de Ondas Planas. 55
2-1.1 Incidencia de ondas planas sobre un plano perfectamente conductor. 55
2-1.2 Incidencia oblicua de ondas planas sobre una superficie perfectamente conductora 58
a) Campo eléctrico paralelo a la interfaz 60
b) Campo magnético paralelo a la interfaz. 62
2-1.3 Incidencia normal de una onda plana a un dieléctrico. 65
2-1.4 Incidencia normal sobre medios dieléctricos estratificados. 67
2-1.5 Incidencia normal sobre un medio parcialmente conductor 70
2-1.6 Incidencia oblicua sobre un dieléctrico. Refracción 71
2-1.7 Incidencia oblicua sobre un medio dieléctrico estratificado. 77
2-1.8 Incidencia oblicua sobre un medio parcialmente conductor. 78
Capítulo 3. Ondas Guiadas 80
3.1 Ondas guiadas. 81
3-1.1 Ondas TEM guiadas. Guía de ondas de placas paralelas. 81
3-1.2 Representación de los campos en componentes transversales y longitudinales. 84

3-1.3 Ondas TEM sobre otras geometrías. Transformaciones conformes. 85
3-2 Aproximación circuital. Líneas de transmisión..... 91
3-3 Ondas TE sobre una guía de placas paralelas 97
3-4 Ondas TM guiadas. 104
3-5 Interpretación física de la propagación multi-modo. 106
3.5.1 Concepto de modo dominante. 111
3.5.2 Introducción a la teoría del espectro angular. 112
3.6 Guía de ondas rectangular. 115
3.7 Guía de ondas cilíndrica. 119
3.7.1 Modos TM en guías de ondas cilíndricas. 120
3.7.2 Modos TE en guías de ondas cilíndricas. 122
3.8 Impedancia de Entrada de Líneas de Transmisión. 124
3.8.1 Voltajes y corrientes. Patrón de ondas estacionarias. 124
3.8.2 Carga Acoplada 129
3.8.4 Circuito Abierto 130
3.8.5 Carga resistiva pura 131
3.8.7 El Transformador de λ/4 132
3.8.8 Interconexión de líneas. 132
3.8.9 Acoplamiento con transformador λ/4. 134
3.8.10 Acoplamiento con un stub. 135
3.8.11 Acoplamiento con dos stubs. 137
3.8.12 Acoplamiento con Red PI. 139
3.9 Potencia incidente y Potencia Reflejada 141
3.10 Líneas con pérdidas. 141
3.11 Métodos gráficos para el estudio de las líneas de transmisión 143
3.11.1 El Diagrama Bicircular 144
3.11.2 La Carta de Smith 147
3.11.3 Representación de Tensiones y Corrientes en la Carta de Smith 149
3.12 Aplicaciones de la Carta de Smith 150
3.12.1 Impedancia de entrada de una línea sin pérdidas 150
3.12.2 Admitancia de entrada de una línea sin pérdidas 151
3.12.3 Conversión de Impedancia a Admitancia. 152
3.12.4 Voltajes y Corrientes. 152
3.12.5 Líneas con pérdidas 154
3.12.6 Acoplamiento de cargas con un stub 155
3.12.6.1 Respuesta de frecuencia del stub sencillo 156
3.12.7 Acoplamiento por medio de stub doble 158
3.12.8 Líneas con diferente impedancia característica 159
3.12.9 Acoplamiento con parámetros concentrados 161
3.12.9.1 Acoplamiento serie-paralelo 161
3.12.9.2 Acoplamiento paralelo-serie 162
3.12.9.3 Métodos combinados. Redes T y Redes Π 163
3.12.10 Solución computacional 164
3.12.10.1 Algoritmos recursivos. 165
3.12.10.2 Coeficiente de Reflexión en líneas en paralelo. 166
Capítulo 4. Parámetros de Dispersión 171

4-1 Parámetros de Dispersión....172
4.1.1 Casos particulares....175
4.1.2 La carga como generador....176
4.1.3 Potencia aparente....177
4.1.4 Significado físico de la normalización....177
4.1.5 Matriz admitancia aumentada....178
4.1.6 Ejemplos de cálculo....179
4.1.7 Otro ejemplo: El puente de Wheatstone....180
4.2 Redes de N puertos....182
4.2.1 Representación de una red de N puertos....182
4.2.2 Redes de 2 puertos....184
Ejemplo de cálculo. Caso 1....185
Ejemplo de cálculo. Caso 2....186
Ejemplo de cálculo. Caso 3....187
4.3 Potencia Transferida en una Red de N-puertos....189
4.3.1 Redes sin pérdidas....190
4.3.2 La condición unitaria en redes de dos puertos....190
4.3.3 Redes Simétricas....191
4.3.4 Componentes no recíprocos....196
4.4 Otras Matrices utilizadas en Redes....198
4.5 Ejemplos de cálculo.....200
4.6 Software para el cálculo de Redes.....203
Capítulo 5. Radiación....206
5. Radiación.....207
5-1 Campo radiado por un dipolo corto.....209
5-1.1 Interpretación de las soluciones. Campo lejano y campo cercano. Patrón de radiación.212
5-1.2 Parámetros del Patrón de radiación.....215
5-2 Representación en términos de componentes transversales y radiales....217
5-2.1 Aproximación de campo lejano.....219
5-3 Campo radiado por un dipolo magnético....221
5-4 Parámetros básicos de un radiador electromagnético....224
5-4.1 Resistencia de radiación....227
5-5 La antena como receptor....228
5-6 Antenas lineales....233
5-6.1 Línea de corriente uniforme....236
5-6.2 Línea de corriente con fase lineal....239
5-7. Radiación desde aberturas. Elemento de Huygens....245
5-8 Elipsoides de Fresnell....250
5-9 Difracción alrededor de obstáculos. Modelo Filo de cuchillo....253
Capítulo 6. Radioenlaces....259
6 Elementos de cálculo de enlaces.....260

Capítulo I

Conceptos Fundamentales

1-1. Introducción.

El objetivo de este curso es el estudio teórico y el análisis de los fenómenos electromagnéticos que varían en el tiempo, con particular énfasis en aquellos que presentan variaciones sinusoidales. En este capítulo se presentan los conceptos fundamentales, y se presume que el estudiante posee un conocimiento previo en electrostática, en teoría de circuitos eléctricos y en álgebra y análisis vectorial. En el caso del álgebra se estima que el estudiante debe conocer los métodos de resolución de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales bajo condiciones de contorno, y dominar los conceptos asociados de autovalores y soluciones características.

Antes de comenzar con el curso propiamente dicho vale la pena tratar de resolver las siguientes interrogantes:

a) ¿Qué es una teoría?

b) ¿Cuál es el papel del Ingeniero en el proceso de producción de conocimientos?

c) ¿Cuál es el papel de la Teoría Electromagnética en la carrera de Ingeniería Eléctrica y en la Ingeniería de Telecomunicaciones?

Para responder a la primera pregunta es necesario destacar que todo el desarrollo que ha experimentado la especie humana desde su aparición sobre la Tierra hace unos pocos miles de años ha sido posible gracias a la extraordinaria capacidad de imaginación del cerebro humano. Es precisamente la capacidad de imaginar, de fantasear, de especular, lo que le permite al hombre avanzar más allá de lo meramente evidente, le permite anticipar resultados y evitar posibles riesgos o al menos asumir en forma consciente tales riesgos. Uno de nuestros parientes más cercanos en la evolución, el chimpancé puede ser enseñado a manejar una herramienta, pero es incapaz de utilizarla para crear nuevas herramientas. De igual manera, se ha logrado enseñarles a mover las piezas del ajedrez, pero sin que sean capaces de jugar una partida real. Todo esto es debido a que el cerebro del simio, como el de otros animales, reacciona ante las circunstancias

de igual forma que un computador: simplemente sigue un conjunto de reglas aprendidas, pero sin que sea capaz de anticipar el resultado de sus acciones. Una gacela reacciona ante la presencia de un tigre y emprende la huida siguiendo sus instintos (es decir, "el programa aprendido"). El ser humano ante circunstancias nuevas tiende a actuar también instintivamente, pero eventualmente su cerebro halla una "solución" que le permite reaccionar en forma diferente ante las circunstancias: se crea un conocimiento nuevo a partir del existente. Una vez creado y validado este conocimiento (siguiendo reglas muy parecidas a las de la Ingeniería de Software), simplemente es incorporado a la "biblioteca" de programas residentes y utilizado posteriormente cuando las circunstancias lo ameriten o cuando sea requerido en un nuevo proceso de creación de conocimientos.

El primer paso del proceso de creación de conocimientos consiste en el modelaje. Un modelo es simplemente una representación de la realidad en una forma apropiada para que el cerebro pueda manejarla a su conveniencia durante el proceso de pensar. El modelaje se inicia con una observación de la realidad; la calidad del modelo (y su utilidad) estarán determinadas en un alto grado por nuestra capacidad de observación. La observación es un proceso mental que implica "ver más allá de lo evidente". La observación requiere de una "adquisición de datos" a través de nuestros órganos de los sentidos, un procesamiento para "filtrar" o "limpiar" estos datos de información espuria que pueda ser irrelevante para el objeto del modelaje, y una referencia constante al conocimiento previo para verificar la validez de dichos datos. Estos procesos no son secuenciales sino que están íntimamente relacionados entre sí.

Eventualmente surge el modelo como piezas de un rompecabezas que se van uniendo. Sin embargo, este modelo inicial podrá luego ser modificado o refinado durante el proceso de creación de la teoría, como se verá más adelante. En el caso de los fenómenos afines a la ingeniería la observación y el modelaje han sido realizados (principalmente en los últimos dos siglos) por los físicos.

Una vez que se dispone de un modelo, el próximo paso consiste en la formulación de hipótesis, y su validación. Esto es el "jugar con el modelo", es el "what if" de los economistas, la "especulación" de los científicos. Si se dispone en nuestro cerebro de un modelo, podemos crear experimentos mentales, es decir someter nuestro modelo a una serie de pruebas y sacar conclusiones de estas experiencias: ¿Qué pasaría si muevo el alfil a tal o cual posición? ¿Cuál sería el impacto sobre el índice bursátil si se produce un alza de la tasa de interés activo de un

1%? ¿Se podrá lograr mejorar el comportamiento de los componentes electrónicos en alta frecuencia si los fabricamos con Arseniuro de Galio en lugar de Silicio? son algunas de las pruebas a que someterían sus modelos respectivamente un jugador de ajedrez, un economista y un ingeniero electrónico. El objeto de una teoría consiste en tratar de predecir los hechos antes de que ocurran para sacar provecho de lo positivo o evitar situaciones negativas.

Para poder realizar todas estas experiencias mentales se necesita un conjunto de reglas rígidas a fin poder garantizar la validez de los resultados. Tales reglas han sido desarrolladas a partir de modelos previos y constituyen colectivamente lo que se llama una teoría.

Por supuesto que la validez de una teoría depende de la calidad del o los modelos que la soportan, y por tanto tienen el valor de una "verdad relativa", sólo valida en las condiciones en que se desarrollaron esos modelos. Para ilustrar este punto de vista considérense las siguientes teorías acerca de la forma de la Tierra y el Universo: para el hombre primitivo dedicado a actividades de pastoreo y agricultura bastaba un modelo de Tierra Plana ubicada en el centro del Universo (después de todo él era el centro de su "Universo"). Esa era su "verdad". Su modelo satisfacía todas las pruebas a que él podría someterlo. Sin embargo, cuando el hombre comenzó a aventurarse en el mar, empezó a observar circunstancias en las cuales su modelo de Tierra Plana no predecía correctamente los hechos. Con el curso del tiempo se desarrollaron nuevas teorías hasta llegar a nuestra concepción actual de una Tierra redonda (no exactamente esférica) que no es ni remotamente el "centro del Universo".

Si se está estudiando una partida de ajedrez o un partido de béisbol la teoría está constituida por las reglas básicas del juego más las estrategias desarrolladas a lo largo del tiempo y prueba de ello son los incontables libros que se han escrito acerca del llamado "juego-ciencia" o las narraciones de destacados jugadores. En todo caso se requiere de un lenguaje en el cual escribir esta teoría. El jugador de ajedrez debe dominar conceptos como "apertura", "juego medio", "jaque", "mate", etc. Por otra parte en el béisbol se requiere entender términos como "carrera", "strike", "home-run", "double-play", etc.

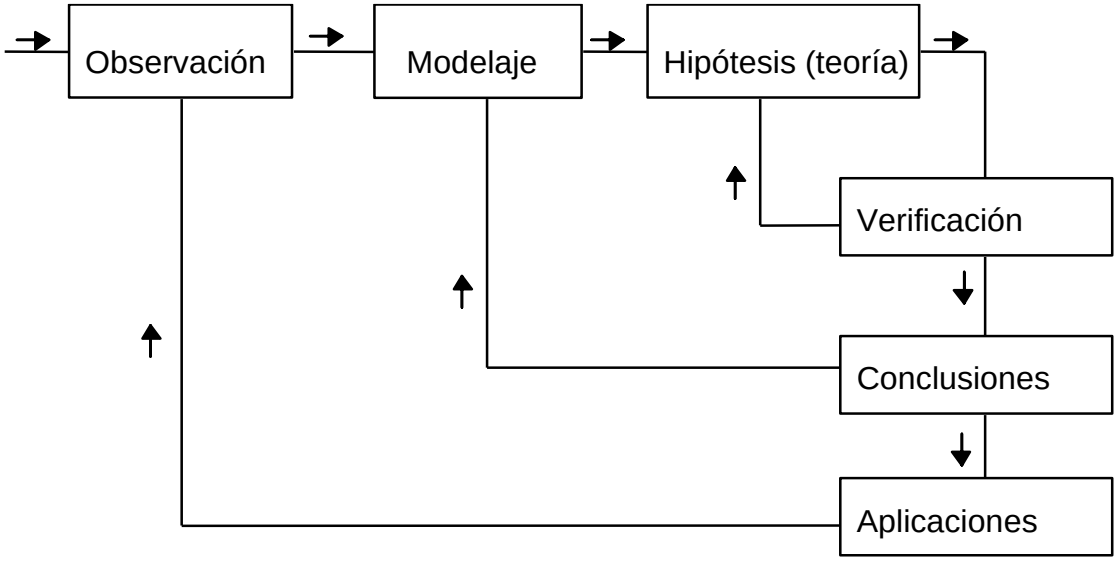
En el caso de las teorías físicas, el lenguaje es la matemática. Los modelos físicos (así como otros muchos modelos) se representan en el lenguaje de las matemáticas y es a través de sus reglas que se puede "jugar el partido" que nos permita predecir el comportamiento de una nave espacial, una onda electromagnética o el motor de un automóvil. Inclusive los matemáticos también desarrollan modelos que les han permitido elaborar nuevas teorías y crear nuevas

herramientas como las matemáticas de los conjuntos difusos, los fractales y las matemáticas del caos.

Al aplicar una herramienta matemática a un modelo físico (y a cualquier otro también) se debe tener mucho cuidado de verificar los límites de validez de la misma y las condiciones del modelo. Por ejemplo, a lo largo de este curso se aplicará con mucha frecuencia el "teorema de superposición" y se insistirá en la condición de que los medios deberán ser lineales.

La última etapa en el desarrollo de una teoría consiste en la interpretación de los resultados y (sobre todo en el caso de la ingeniería) en su aplicación. Las hipótesis deberán ser confrontadas con la evidencia experimental, sea ésta el resultado de mediciones reales o pruebas analíticas o numéricas sobre el modelo, o una mezcla de ambas. La Teoría de la Gravitación Universal fue desarrollada por Newton a través de la observación de la caída de los cuerpos (la leyenda lo atribuye a la caída de una manzana sobre su cabeza), y el propio Newton realizó innumerables experimentos para verificarla. Por otra parte los postulados de Maxwell debieron esperar 15 años antes de ser verificados. Existen así mismo innumerables aplicaciones de la misma en nuestra vida diaria.

En resumidas cuentas el proceso interminable de producción de conocimientos puede resumirse en el siguiente diagrama:



b) ¿Cuál es el papel del Ingeniero en el proceso de producción de conocimientos?

En las consideraciones anteriores se ha asignado la actividad de modelaje principalmente (aunque no exclusivamente) al físico, y el desarrollo de la teoría al matemático. Esta ha sido una asignación totalmente arbitraria para tratar de ilustrar cada una de las actividades con un profesional determinado, pues el primero debe ser capaz de formular sus hipótesis y validarlas usando el lenguaje de las matemáticas, en tanto que el segundo podrá formular modelos matemáticos aptos para sus necesidades particulares. El ingeniero por otra parte está más involucrado en las aplicaciones prácticas de estos conocimientos. Él se nutre de los conocimientos derivados de los modelos teóricos para satisfacer necesidades a través de invenciones prácticas. Sin embargo, para poder llevar a cabo estas realizaciones él debe estar consciente de los límites de aplicabilidad de las teorías, y por tanto debe estar familiarizado con todo el proceso desde la observación de los fenómenos hasta la validación de los resultados que confirman la teoría. Así mismo, el ingeniero es observador de fenómenos, derivados de la aplicación práctica de los conocimientos, y puede realizar aportes directos al modelaje o reportar sus observaciones para que otros realicen las modificaciones pertinentes a los modelos. En ocasiones el ingeniero deberá formular sus propios modelos, adelantar hipótesis, validarlas y eventualmente convertirlas en una aplicación práctica como en el caso del diseño de circuitos electrónicos, en el diagnóstico de fallas o en la planificación de sistemas de comunicaciones.

c) ¿Cuál es el papel de la Teoría Electromagnética en la carrera de Ingeniería de Telecomunicaciones?

La respuesta a esta pregunta aparece ya en el último párrafo del punto anterior: el ingeniero debe conocer la teoría, desde las observaciones que dieron origen a los modelos, la formulación matemática de los mismos y las conclusiones que se derivan de la aplicación de los principios, sin perder de vista los límites de validez de los modelos. Debe entender que los mismos constituyen sólo "verdades relativas" ajustadas a la limitada (y necesaria) simplicidad de los modelos para entonces reconocer cuando se ha agotado la validez de un modelo y es necesario recurrir a una teoría más general. La tecnología impone nuevos y más exigentes requerimientos a los conocimientos que debe manejar un ingeniero: velocidades más altas en las computadoras producen emisiones electromagnéticas que no pueden ser predichas por la teoría de circuitos, sistemas de potencia interconectados de mayor extensión presentan problemas de estabilidad que

requieren del uso de ondas viajeras para ser comprendidos, sistemas de comunicaciones de alta capacidad que transportan miles de conversaciones telefónicas simultáneas en una fibra óptica, etc.

1-2. Las ecuaciones básicas

El modelaje usual de los fenómenos electromagnéticos se realiza a través de las denominadas ecuaciones de campo, relativas a seis cantidades físicas. Cada una de estas cantidades está representada por una variable que toma un valor (escalar o vectorial) en cada punto del espacio. En algunas ocasiones se da el mismo nombre a la variable que a la cantidad física que ella representa. El conjunto de todos los puntos del espacio en el cual esté definida la variable genera lo que se llama un **campo**. Por ejemplo, la intensidad eléctrica viene representada por el vector Intensidad de Campo Eléctrico, y el conjunto de todos los puntos del espacio donde están definidos estos vectores constituye un Campo de Intensidades. Las seis cantidades fundamentales y las variables que las representan son:

La Intensidad Eléctrica, representada por $\vec{\mathcal{E}}$, el vector intensidad de campo eléctrico, en unidades de Volts/m.

La Intensidad Magnética, representada por $\vec{\mathcal{H}}$, el vector intensidad de campo magnético, en unidades de Ampere/m

La Densidad de Flujo Eléctrico, representada por el vector $\vec{\mathfrak{D}}$, en unidades de Coulomb/m^2

La Densidad de Flujo Magnético, representada por el vector $\vec{\mathcal{B}}$, en unidades de Weber/m^2

La Densidad de Corriente Eléctrica, representada por $\vec{J}$, vector, en unidades de Ampere/m^2

La Densidad de Carga Eléctrica, representada por q_v, escalar, en unidades de Coulomb/m^3

Estas variables son funciones no sólo de posición sino también del tiempo. Se dice que una variable es de comportamiento regular (well-behaved) cuando es una función continua y posee derivadas continuas. En todos los puntos donde las variables anteriores son regulares se cumplen las ecuaciones de Maxwell (en forma diferencial):

$$\nabla \times \vec{\mathcal{E}}(x,y,z,t) = -\frac{\partial \vec{\mathcal{B}}(x,y,z,t)}{\partial t} \quad ; \quad \nabla \cdot \vec{\mathcal{B}}(x,y,z,t) = 0 \tag{1.1}$$

$$\nabla \times \vec{\mathcal{H}}(x,y,z,t) = \frac{\partial \vec{\mathcal{D}}(x,y,z,t)}{\partial t} + \vec{\mathcal{J}} \quad ; \quad \nabla \cdot \vec{\mathcal{D}}(x,y,z,t) = q_v(x,y,z,t) \tag{1.2}$$

Estas ecuaciones incluyen la información contenida en la ecuación de continuidad

$$\nabla \cdot \vec{\mathcal{J}}(x,y,z,t) = -\frac{\partial q_v(x,y,z,t)}{\partial t} \tag{1.3}$$

que expresa la conservación de la carga. En estas expresiones se ha utilizado letra cursiva para las variables que son funciones del tiempo y del espacio (x, y, z, t) con la finalidad de reservar las letras normales para las cantidades complejas que son sólo función del espacio (x, y, z). Asimismo las cantidades vectoriales se indicarán en negrita o con un guion encima. Es importante recalcar el significado de estas ecuaciones. En particular, a pesar de que las mismas se escriben con un signo de igualdad, en realidad representan transformaciones inyectivas: la distribución espacial de los campos es consecuencia de la variación temporal de los flujos (¡¡¡pero no a la inversa!!!)

Además de la forma diferencial de las ecuaciones de Maxwell, existe también una forma integral, la cual es más apropiada para aquellos casos cuando puedan existir discontinuidades espaciales, como en el caso de interfaces entre medios. En esos casos se debe cumplir que los flujos sean continuos a través de la discontinuidad. La forma integral se obtiene de la aplicación del teorema de Stokes o el teorema de Green a las expresiones diferenciales.

$$\oint \vec{\mathcal{E}} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \iint \vec{\mathcal{B}} \cdot d\vec{s} \quad ; \quad \iint_S \vec{\mathcal{B}} \cdot d\vec{s} = 0 \tag{1.4}$$

$$\oint \vec{\mathcal{H}} \cdot d\vec{l} = \frac{d}{dt} \iint \vec{\mathcal{D}} \cdot d\vec{s} + \iint \vec{\mathcal{J}} \cdot d\vec{s} \quad ; \quad \iint_S \vec{\mathcal{D}} \cdot d\vec{s} = \iiint_V q_v \, d\tau \tag{1.5}$$

donde, en el caso de las integrales de la izquierda “s” es una superficie abierta bordeada por el camino cerrado “l”, en tanto que en el caso de las integrales de la derecha “S” es una superficie cerrada que envuelve al volumen “V”. La forma integral de la ecuación de continuidad es:

$$\iint_S \vec{\mathcal{J}} \cdot d\vec{s} = -\frac{d}{dt} \iiint_V q_v \, d\tau \tag{1.6}$$

En todos los casos se siguen las reglas normales de la mano derecha para la integral de circulación, y que el diferencial d**s** apunta hacia afuera de la superficie cerrada.

Así mismo existen cantidades circuitales o cantidades integrales que dependen de las variables de campo:

v, el voltaje en unidades de Volts

i, la corriente eléctrica en unidades de Amperes

q, la carga eléctrica en unidades de Coulombs

ψ, el flujo magnético en unidades de Webers

ψ^{ε}, el flujo eléctrico en unidades de Coulombs

u, la fuerza magnetomotriz en unidades de Amperes

La relación explícita de estas cantidades circuitales con las variables de campo es:

$$v = \int \vec{\mathcal{E}} \cdot d\vec{l} \quad ; \quad \psi = \iint_S \vec{\mathcal{B}} \cdot d\vec{s} \tag{1.7}$$

$$i = \iint \vec{\mathcal{J}} \cdot d\vec{s} \quad ; \quad \psi^e = \iint \vec{\mathcal{D}} \cdot d\vec{s} \tag{1.8}$$

$$q = \iiint q_v \, d\tau \quad ; \quad u = \int \vec{\mathcal{H}} \cdot d\vec{l} \tag{1.9}$$

Igualmente, se mantienen las convenciones normales respecto a los signos, es decir, en el caso de las integrales de línea la referencia positiva es al comienzo de la trayectoria de integración; en el caso de las integrales de superficie, la referencia positiva está en la dirección de d**s**. Las ecuaciones de Maxwell también pueden ser escritas en términos de las cantidades circuitales mezcladas con las variables de campo

$$\oint \vec{\mathcal{E}} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\psi}{dt} \quad ; \quad \iint_S \vec{\mathcal{B}} \cdot d\vec{s} = 0 \tag{1.10}$$

$$\oint \vec{\mathcal{H}} \cdot d\vec{l} = \frac{d\psi^e}{dt} + i \quad ; \quad \iint_S \vec{\mathcal{D}} \cdot d\vec{s} = q \tag{1.11}$$

y la ecuación de continuidad

$$\oint \vec{\mathcal{J}} \cdot d\vec{l} = -\frac{dq}{dt} \tag{1.12}$$

1-3. Relaciones Constitutivas

Además de las ecuaciones de campo, se requiere especificar las características del medio en el cual existen dichos campos. Si se considera el dominio de $\vec{\mathcal{E}}$ y $\vec{\mathcal{H}}$ como el campo electromagnético (es decir la región en cada uno de cuyo puntos están definidos $\vec{\mathcal{E}}$ y $\vec{\mathcal{H}}$) entonces se podrán expresar los flujos de $\vec{\mathcal{D}}, \vec{\mathcal{B}}$ y $\vec{\mathcal{J}}$ en términos de las intensidades de campo $\vec{\mathcal{E}}$ y $\vec{\mathcal{H}}$. En forma general se podrá escribir

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{D}} &= \vec{\mathcal{D}}\left(\vec{\mathcal{E}}, \vec{\mathcal{H}}\right) \\ \vec{\mathcal{B}} &= \vec{\mathcal{B}}\left(\vec{\mathcal{E}}, \vec{\mathcal{H}}\right) \\ \vec{\mathcal{J}} &= \vec{\mathcal{J}}\left(\vec{\mathcal{E}}, \vec{\mathcal{H}}\right) \end{aligned} \tag{1.13}$$

las cuáles son las relaciones constitutivas. Las formas explícitas de las mismas se pueden hallar por experimentación o deducirse de consideraciones atómicas.

El término **espacio libre** se utiliza para denotar al vacío o cualquier otro medio que tenga esencialmente las mismas características. En este caso las relaciones constitutivas asumen formas particularmente sencillas:

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{D}} &= \epsilon_0 \vec{\mathcal{E}} \\ \vec{\mathcal{B}} &= \mu_0 \vec{\mathcal{H}} \\ \vec{\mathcal{J}} &= 0 \end{aligned} \tag{1.14}$$

donde ε_o es la permitividad del vacío y μ_o es la permeabilidad del vacío. Bajo ciertas circunstancias las relaciones constitutivas también adquieren formas sencillas para muchos materiales. Se dice que tales materiales son lineales simples y las relaciones son

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{D}} &= \epsilon \ \ \vec{\mathcal{E}} \\ \vec{\mathcal{B}} &= \mu \ \ \vec{\mathcal{H}} \\ \vec{\mathcal{J}} &= \sigma \, \vec{\mathcal{E}} \end{aligned} \tag{1.15}$$

En este caso ε es la permitividad del medio, μ es su permeabilidad y σ es la conductividad. Debe recalcarse que estas relaciones se cumplen sólo bajo ciertas circunstancias; pueden dejar de cumplirse cuando o $\vec{\mathcal{E}}, \vec{\mathcal{H}}$ o sus derivadas temporales sean muy grandes en cuyo caso los materiales pasan a comportarse en forma no lineal. Existen otras circunstancias en las cuales los valores de ε, μ o σ son funciones de posición en el espacio y se habla entonces de materiales no homogéneos. Existen así mismo materiales en los cuales $\vec{D}$ no tiene la misma dirección de $\vec{\mathcal{E}}$, o $\vec{\mathcal{B}}$ no es paralelo a $\vec{\mathcal{H}}$; tales materiales son llamados anisotrópicos. La definición de linealidad puede ser extendida para muchos materiales de acuerdo a las siguientes ecuaciones diferenciales lineales:

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{D}} &= \epsilon \ \ \vec{\mathcal{E}} + \epsilon_1 \frac{\partial}{\partial t} \vec{\mathcal{E}} + \epsilon_2 \frac{\partial^2}{\partial_{t^2}} \vec{\mathcal{E}} + \cdots \\ \vec{\mathcal{B}} &= \mu \ \ \vec{\mathcal{H}} + \mu_1 \frac{\partial}{\partial t} \vec{\mathcal{H}} + \mu_2 \frac{\partial^2}{\partial_{t^2}} \vec{\mathcal{H}} + \cdots \\ \vec{\mathcal{J}} &= \sigma \, \vec{\mathcal{E}} + \sigma_1 \frac{\partial}{\partial t} \vec{\mathcal{E}} + \sigma_2 \frac{\partial^2}{\partial_{t^2}} \mathcal{E} + \cdots \end{aligned} \tag{1.16}$$

1-4. El Concepto de Corriente Generalizada

Fue Maxwell el primero en notar que la ley de Ampere para la estática, $\nabla \times \vec{H} = \vec{J}$, era incompleta para el caso de campos variables en el tiempo. El corrigió la ley para incluir una corriente de desplazamiento eléctrico $\partial \vec{D} / \partial t$ además de la corriente de conducción. El se imaginaba que tal

corriente era producida por el desplazamiento de cargas pertenecientes al "éter", un fluido sin peso que llena todo el espacio. Si bien el concepto de éter ha sido descartado por haber sido imposible su detección [1] es conveniente considerar al término $\partial\vec{D}/_{\partial t}$ como una corriente. De igual manera, y dada la simetría de las ecuaciones de Maxwell es conveniente considerar al término$\partial\vec{B}/_{\partial t}$ como una corriente de desplazamiento magnético. Finalmente, y para tomar en cuenta las fuentes, se incluirán en las ecuaciones las denominadas corrientes impresas (o impuestas), tanto eléctricas como magnéticas. Los símbolos $\vec{J}$ y $\vec{M}$ se usarán para denotar las corrientes eléctricas o magnéticas, en general, con superíndices que indiquen el tipo de corriente. Por tanto las corrientes totales serán:

$$\vec{\mathcal{J}}^t = \frac{\overrightarrow{\partial \mathcal{D}}}{\partial t} + \vec{\mathcal{J}}^c + \vec{\mathcal{J}}^i \tag{1.17}$$

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}^t = \frac{\partial \vec{\mathcal{B}}}{\partial t} + \overrightarrow{\mathcal{M}}^i \tag{1.18}$$

donde los superíndices t, c e i denotan respectivamente corrientes totales, de conducción e impresas. Similares consideraciones podrán aplicarse a las cantidades circuitales.

En términos de estas corrientes generalizadas, se podrán escribir las ecuaciones de Maxwell diferenciales como:

$$\nabla \times \vec{\mathcal{E}} = -\overrightarrow{\mathcal{M}}^t \quad ; \quad \nabla \times \vec{\mathcal{H}} = \vec{\mathcal{J}}^t \tag{1.19}$$

lo cual encuentra aplicaciones en muchos casos de la teoría. Las ecuaciones de divergencia no han sido presentadas explícitamente porque quedan automáticamente incluidas en esta representación.

1-5. Energía y Potencia

Considérense las cantidades circuitales, v e i,

$$v = \int \vec{\mathcal{E}}.d\vec{l} \quad ; \quad i = \int \vec{\mathcal{J}}.d\vec{s} \tag{1.20}$$

El producto v . i representa la potencia instantánea que se está intercambiando entre dos partes de un circuito. Al analizar la relación de estas cantidades con las variables de campo es aparente

[1] Algunos autores consideran hoy día que tal "eter" estaría constituido por los neutrinos, partículas subatómicas sin carga ni masa. Ver por ejemplo: Los Tres Primeros Minutos del Universo, de Weinberg.

que el producto interno $\vec{\mathcal{E}}.\vec{J}$ debe representar alguna forma de densidad de potencia; por extensión el producto $\vec{\mathcal{H}}.\vec{\mathcal{M}}$ también debe serlo. Al considerar la identidad vectorial

$$\nabla \cdot \left(\vec{\mathcal{E}} \times \vec{\mathcal{H}}\right) = \vec{\mathcal{H}}.\nabla \times \vec{\mathcal{E}} - \vec{\mathcal{E}}.\nabla \times \vec{\mathcal{H}} \tag{1.21}$$

y al sustituir por las corrientes generalizadas se tiene

$$\nabla \cdot \left(\vec{\mathcal{E}} \times \vec{\mathcal{H}}\right) + \vec{\mathcal{H}}.\vec{\mathcal{M}}^t + \vec{\mathcal{E}}.\vec{J}^t \tag{1.22}$$

la cual al ser integrada sobre una región delimitada por una superficie y aplicar el teorema de la divergencia se convierte en

$$\iint_S \ \vec{\mathcal{E}} \times \vec{\mathcal{H}}.d\vec{s} + \iiint\left(\vec{\mathcal{E}} \cdot \vec{J}^t + \vec{\mathcal{H}}.\vec{\mathcal{M}}^t\right)d\tau = 0 \tag{1.23}$$

Ambas expresiones serán interpretadas como dos formas de la conservación de la energía. El argumento de la integral de superficie, es decir,

$$\vec{\mathcal{E}} \times \vec{\mathcal{H}} = \vec{\mathcal{S}} \tag{1.24}$$

es el vector de Poynting, el cual se interpreta como una densidad de flujo de potencia, y tiene unidades de [Watt/m^2]. Su divergencia

$$\mathcal{p}_f = \nabla \cdot \vec{\mathcal{S}} = \nabla \cdot \left(\vec{\mathcal{E}} \times \vec{\mathcal{H}}\right) \tag{1.25}$$

será entonces la densidad de potencia volumétrica [Watt/m^3] que emana de un punto y la

$$P_f = \iint \vec{\mathcal{S}}.d\vec{s} = \iint\left(\vec{\mathcal{E}} \times \vec{\mathcal{H}}\right).d\vec{s} \tag{1.26}$$

es la potencia total que abandona la región a través de la superficie de integración. Similarmente los otros términos de (1.22) pueden interpretarse como la rata de incremento de la densidad de energía en un punto, en tanto que los términos restantes de (1.23) representan la rata de incremento de energía dentro de la región.

En el caso de medios lineales simples los últimos dos términos de (1.22) se convierten en:

$$\vec{\mathcal{E}} \cdot \vec{J}^t = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\epsilon E^2\right) + \sigma E^2 + \vec{\mathcal{E}} \cdot \vec{J}^i \tag{1.27}$$

$$\vec{\mathcal{H}} \cdot \mathcal{M}^t = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\mu H^2\right) + \vec{\mathcal{H}} \cdot \vec{\mathcal{M}}^i \tag{1.28}$$

donde $\vec{J}^i$ *y* $\vec{\mathcal{M}}^i$ representan posibles fuentes de corrientes, E es módulo del vector $\vec{\mathcal{E}}$, y H es el módulo de $\vec{\mathcal{H}}$. El factor ½ proviene de $\vec{\mathcal{E}}.\frac{\partial \epsilon \vec{\mathcal{E}}}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\epsilon \vec{\mathcal{E}}.\vec{\mathcal{E}}\right)$

Los términos $w_e = \frac{1}{2}\varepsilon E^2$ y $w_m = \frac{1}{2}\mu H^2$ son idénticos a las densidades de energía de los campos eléctrico y magnético estáticos y esta interpretación será mantenida para los campos dinámicos.

El término $\rho_d = \sigma E^2$ se identifica como la densidad de potencia convertida a energía calorífera, o potencia disipada. Finalmente, la densidad de potencia suministrada por las fuentes de corriente será definida como:

$$p_s = -\left(\vec{\mathcal{E}}.\vec{\mathcal{J}}^i + \vec{\mathcal{H}}.\vec{\mathcal{M}}^i\right) \tag{1.29}$$

La dirección de referencia de las fuentes de potencia es opuesta a la de la potencia disipada como lo evidencia el signo menos en la expresión (1.29). En términos de las cantidades definidas anteriormente se puede rescribir la expresión (1.22) como:

$$\rho_s = \rho_f + \rho_d + \frac{\partial}{\partial t}\left(w_e + w_m\right) \tag{1.30}$$

Esta expresión puede interpretarse como sigue: en cualquier punto la densidad de potencia suministrada por las fuentes debe ser igual a aquella que abandona el punto, más la disipada, más la rata de incremento en las densidades de energía eléctrica y magnética almacenadas. Una forma más común de la conservación de la energía es aquella que se refiere a toda la región. En correspondencia a las densidades de energía se definen las energías netas eléctrica y magnética dentro de la región como

$$\mathrm{W_e} = \frac{1}{2}\iiint \varepsilon\, \mathrm{E}^2\, \mathrm{d}\nu \qquad ; \qquad \mathrm{W_m} = \frac{1}{2}\iiint \mu\, \mathrm{H}^2\, \mathrm{d}\nu \tag{1.31}$$

La energía neta convertida a calor por unidad de tiempo es

$$\mathrm{P_d} = \frac{1}{2}\iiint \sigma\, \mathrm{E}^2\, \mathrm{d}\nu \tag{1.32}$$

y, finalmente, la potencia neta suministrada por las fuentes que se hallan dentro de la región es,

$$P_s = -\iiint \left(\vec{\mathcal{E}}.\vec{\mathcal{J}}^i + \vec{\mathcal{H}}.\vec{\mathcal{M}}^i\right) dv \tag{1.33}$$

En términos de estas definiciones se puede escribir la ecuación (1.23) como

$$P_s = P_f + P_d + \frac{d}{dt}\left(W_e + W_m\right) \tag{1.34}$$

Por tanto, la potencia suministrada por las fuentes dentro de una región debe ser igual a aquella que abandona la región, más la disipada, más la rata de incremento de las energías eléctrica y magnética almacenadas dentro de la misma.

1-6. Solución de las ecuaciones de Maxwell.

1-6.1 Ondas viajeras en el espacio libre.

Las ecuaciones de Maxwell constituyen un modelo que describe las relaciones entre las variables de campo, pero para que sean de utilidad deben ser manipuladas para anticipar situaciones que puedan ser aprovechadas por el científico o el ingeniero. Sin embargo, en su forma más general tales ecuaciones son extremadamente difíciles de solucionar a pesar de su sencillez aparente. En lugar de tratar de hallar una solución general lo que se puede hacer es estudiar un conjunto de situaciones particulares y extrapolar las conclusiones obtenidas a fin de intuir cual será el comportamiento general de las variables de campo. Para comenzar esta labor se comenzará por modelar el medio. En nuestro estudio se considerarán casi exclusivamente medios que sean lineales, isotrópicos y homogéneos; más aún, se considerarán en principio medios lineales simples y el paso a medios lineales generales se realizará cuando sea necesario. El primer medio a considerar será el espacio libre para obtener las primeras conclusiones, las cuales serán aplicadas luego a otros medios lineales simples. Estas restricciones se han elegido tomando en cuenta que una gran cantidad de medios de interés práctico pueden ser modelados como medios lineales simples en una amplia gama de valores de $\vec{\mathcal{E}}\ y\ \vec{\mathcal{H}}$ .Por otra parte el modelo debe ser suficientemente sencillo para poder utilizar herramientas matemáticas habituales, y al mismo tiempo debe tener la rigidez apropiada para permitir arribar a conclusiones válidas.

Las relaciones constitutivas para el espacio libre, sin fuentes ni cargas libres, están dadas por las expresiones (1.4). Cuando se substituyen en (1.1) y (1.2) se obtiene:

$$\nabla \times \vec{\mathcal{E}} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{\mathcal{H}}}{\partial t} \quad ; \quad \nabla \cdot \vec{\mathcal{H}} = 0 \tag{1.35}$$

$$\nabla \times \vec{\mathcal{H}} = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{\mathcal{E}}}{\partial t} \quad ; \quad \nabla \cdot \vec{\mathcal{E}} = 0 \tag{1.36}$$

Para hallar una solución será necesario convertir el conjunto de ecuaciones anteriores en una expresión que contenga a una sola de las variables de campo. Una vez hallada esta variable será muy fácil hallar la otra haciendo uso de las expresiones (1.35) o (1.36).

Para comenzar se tomará el rotor de la primera ecuación de (1.35) y se hará uso de la identidad vectorial,

$$\nabla \times \nabla \times \vec{\mathcal{E}} = \nabla(\nabla \cdot \vec{\mathcal{E}}) - \nabla^2 \vec{\mathcal{E}} = \nabla \times \left(-\mu_0 \frac{\partial \vec{\mathcal{H}}}{\partial t}\right)$$

La divergencia es cero por (1.36). Por otra parte, debido a que el medio es lineal, homogéneo e isotrópico, μ_0 es una constante y se puede invertir el orden entre las derivadas espaciales y temporales. La ecuación queda entonces

$$-\nabla^2 \vec{\mathcal{E}} = -\mu_0 \left(\frac{\partial \nabla \times \vec{\mathcal{H}}}{\partial t}\right) = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t}\left(\epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{\mathcal{E}}\right)$$

y finalmente

$$\nabla^2 \vec{\mathcal{E}} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{\mathcal{E}} = 0 \qquad (1.37)$$

La substitución de (1.37) en (1.36) produce una ecuación idéntica para H. Esta es la denominada ecuación de propagación y se demostrará a continuación que sus soluciones son ondas en movimiento.

Considérese en primer lugar el siguiente caso simplificado: El campo (de intensidad eléctrica) $\vec{\mathcal{E}}$ presenta el mismo valor (en magnitud y dirección) en todos los puntos de un plano infinito, está contenido en el mismo, pero es libre de variar en la dirección perpendicular a éste. Más aún, se considerará que al pasar de un plano a otro sólo la magnitud E varía pero no su dirección. Sin pérdida de generalidad se elegirá un sistema de coordenadas rectangulares de manera que $\vec{\mathcal{E}}$ esté contenido en el plano (x,y) y las variaciones ocurran en la dirección del eje z. En estas condiciones se podrá escribir:

$$\vec{\mathcal{E}}(x,y,z,t) = \vec{\mathcal{E}}(z,t) = E(z,t)\hat{u} \qquad (1.38)$$

donde "**u**" es un vector unitario contenido en el plano transversal (x,y) y *E*(z,t) es la magnitud de $\vec{\mathcal{E}}$. Al sustituir en (1.37) se obtiene:

$$\nabla^2\left(E(z,t)\hat{\mathbf{u}}\right) - \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} E(z,t)\hat{\mathbf{u}} = \left(\nabla^2\left(E(z,t)\right)\right)\hat{\mathbf{u}} - \left(\mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} E(z,t)\right)\hat{\mathbf{u}} = 0$$

De aquí se obtiene la siguiente expresión escalar

$$\nabla^2 E(z,t) - \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} E(z,t) = 0$$

Al expandir el Laplaciano del escalar *E*(z,t) se tiene,

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}E(z,t)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}E(z,t)+\frac{\partial^2}{\partial z^2}E(z,t)-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}E(z,t)=0$$

Las primeras derivadas son nulas, por lo que finalmente,

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}E(z,t)-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}E(z,t)=0 \tag{1.39}$$

Cualquier función del espacio y del tiempo de la forma

$$E(z,t)=f_1\left(\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}z+t\right)\quad o\quad f_2\left(\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}z-t\right) \tag{1.40}$$

o, una combinación lineal de ellas es solución de (1.39). Para demostrarlo se realizará el siguiente cambio de variables,

$$s=\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}\;z-t$$

Entonces,

$$\frac{\partial}{\partial z}f_2(z,t)=\left(\frac{d}{ds}f_2(s)\right)\frac{\partial s}{\partial z}=\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}\left(\frac{d}{ds}f_2(s)\right)=\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}\;\;f_2'(s)$$

y, similarmente

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}f_2(z,t)=\left(\frac{d^2}{ds^2}f_2(s)\right)\frac{\partial s}{\partial z}=\mu_0\varepsilon_0\left(\frac{d^2}{ds^2}f_2(s)\right)=\mu_0\varepsilon_0\;\;f_2''(s)$$

Las derivadas temporales son,

$$\frac{\partial}{\partial t}f_2(z,t)=\left(\frac{d}{ds}f_2(s)\right)\frac{\partial s}{\partial t}=-\left(\frac{d}{ds}f_2(s)\right)=-f_2'(s)$$

y

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}f_2(z,t)=\left(\frac{d^2}{ds^2}f_2(s)\right)\frac{\partial s}{\partial t}=(-1)^2\left(\frac{d^2}{ds^2}f_2(s)\right)=f_2''(s)$$

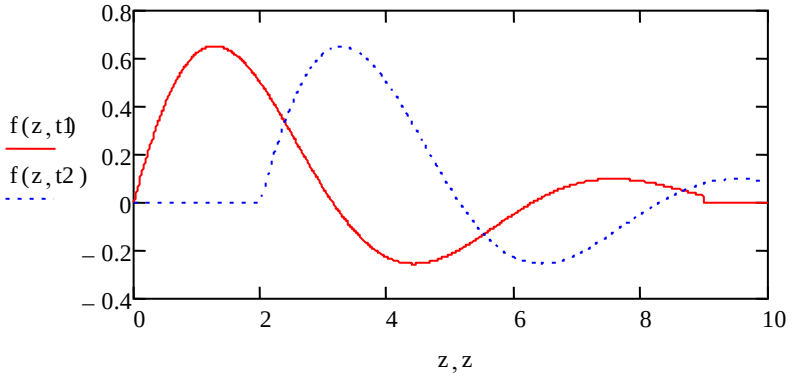
Finalmente, al sustituir en (1.39) se obtiene la identidad

$$\mu_0\varepsilon_0\;f_2''(s)-\mu_0\varepsilon_0\;f_2''(s)=0$$

con una demostración similar para f_1 (z,t).

¿Cuál es la interpretación física de f_2 (z,t)?

Considérese en primer lugar la variación espacial de f_2 para un instante de tiempo dado, por ejemplo $t=t_1$. Entonces $E(z,t_1) = f_2(z,t_1)$ será un función de una sola variable "z". En otro instante de tiempo posterior $t=t_2$ se tiene también $E(z,t_2) = f_2(z,t_2)$.



Pero,

$$f_2(z,t_2) = f_2\left(\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}\,z - t_2\right) = f_2\left(\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}\,z - t_1 - (t_2 - t_1)\right)$$

Si se define una cantidad Δz, tal que $\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}\,\Delta z = (t_2 - t_1)$

entonces,

$$f_2(z,t_2) = f_2\left(\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}\,(z - \Delta z) - t_1\right) = f_2(z - \Delta z, t_1)$$

por lo que

$$E(z,t_2) = E(z - \Delta z, t_1)$$

y, similarmente

$$H(z,t_2) = H(z - \Delta z, t_1) \qquad (1.41)$$

Esto significa que al transcurrir el tiempo de t_1 a t_2 , la distribución espacial de *E* se repite pero desplazada en la cantidad Δz en la dirección positiva de las "z". Una función con estas características se dice que es un propagador o una **función de onda**. En este caso particular se dice que f_2 (z,t) es una función de onda plana. Un análisis similar con f_1 (z,t) demuestra que esa onda se desplaza en la dirección negativa de las "z".

Por tanto, la solución de la ecuación (1.39) está constituida por la superposición de dos ondas que avanzan respectivamente en el sentido positivo y negativo de las "z".

De la ecuación (1.41) se puede extraer otra conclusión importante. Si se define $\Delta t = t_2 - t_1$, entonces $t_1 = t_2 - \Delta t$

La ecuación se puede escribir entonces como,

$$E(z,t_1) = E(z - \Delta z, t_1 - \Delta t) \qquad (1.42)$$

Esto significa que la onda emplea un cierto tiempo Δt en desplazarse de un lugar a otro del espacio la cantidad Δz. Por tanto la onda se mueve a una velocidad finita. La velocidad a que se mueve esta onda vendrá dada por el cociente Δz/Δt. Cuando se substituye la definición de Δz se halla que esta velocidad es,

$$c = \frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} \tag{1.43}$$

cuyo valor es 2,99776 x 10^8 m/seg, la velocidad de la luz en el vacío.

Ahora que se ha hallado una solución para el campo $\vec{\mathcal{E}}$, bastará substituirla en (1.35) para hallar $\vec{\mathcal{H}}$.

$$\nabla \times \vec{\mathcal{E}} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{\mathcal{H}}}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \vec{\mathcal{H}} = \int \left(-\frac{1}{\mu_0} \nabla \times \vec{\mathcal{E}} \right) dt$$

Utilizando (1.38) se tiene,

$$\nabla \times \vec{\mathcal{E}} = \nabla \times (E(z,t)\hat{u}) = \left(\nabla E(z,t)\right) \times \hat{u}$$

El gradiente tiene la dirección **k**, el vector unitario sobre el eje "z". Por tanto, el campo magnético tendrá la dirección dada por el vector unitario **v** que también yace en el plano x,y y que cumple con la condición **u** x **v** = **k** . Por tanto, los vectores **u**, **v** y **k** constituyen una tríada. Considérese en primer lugar la solución f_2. Entonces,

$$\nabla E(z,t) = \nabla f_2(z,t) = \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}\, f_2'(z,t)\hat{\mathbf{k}}$$

y,

$$\vec{\mathcal{H}} = -\frac{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}{\mu_0} \int f_2'(z,t)\, dt\ \hat{k} \times \hat{u}$$

La derivada temporal de f_2 vale,

$$\frac{\partial f_2(z,t)}{\partial t} = (-1)\, f_2'(z,t)$$

por lo que, finalmente,

$$\vec{\mathcal{H}} = \tfrac{1}{\eta_0} f_2\ (z,t)\ \hat{k} \times \hat{u} \tag{1.44}$$

El término $\eta_0 = \sqrt{\dfrac{\mu_0}{\varepsilon_0}}$ es una característica del medio y recibe el nombre de impedancia intrínseca del vacío. Al sustituir los valores de μ_0 y ε_0 se obtiene un valor de 120π = 377 Ohms.

En la ecuación (1.44) se puede notar que la dirección de *H* está perfectamente definida: $\vec{\mathcal{H}}$ está en el plano transversal pues es normal a **k** y además también es perpendicular a **u**. Por otra parte,

si se hubiese considerado la solución f_1, el resultado estaría similarmente en el plano transversal y perpendicular a **u**, pero de sentido opuesto como puede demostrarse fácilmente al calcular el gradiente. El resultado en este caso es

$$\vec{\mathcal{H}} = \frac{1}{\eta_0} f_1\ (z,t)\left(-\hat{k}\times\hat{u}\right) = -\frac{1}{\eta_0} f_1\ (z,t)\hat{v} \qquad (1.45)$$

Adicionalmente, se puede demostrar que estas soluciones de H obedecen a una ecuación diferencial similar a la (1.37) y por tanto son también ondas viajeras. Debido a que los campos $\vec{\mathcal{E}}\ y\ \vec{\mathcal{H}}$ están íntimamente relacionados por las ecuaciones de Maxwell, el término **onda** se aplicará en lo sucesivo para referirse indistintamente a las soluciones de ambos. En algunas ocasiones se utilizará una nomenclatura particular para diferenciar entre sí las soluciones que viajan en el sentido de las "z" positivas y las que viajan en sentido opuesto, como por ejemplo: onda progresiva y onda regresiva.

En conclusión, la aplicación de las ecuaciones de Maxwell a un modelo sencillo del medio como lo es el espacio libre ha permitido arribar a una expresión (la 1.37) cuyas soluciones son ondas viajeras. Para demostrar esto se recurrió a un modelo sencillo de los campos y se eligió convenientemente la orientación del sistema de coordenadas para simplificar la aplicación de las fórmulas matemáticas; sin embargo, durante este proceso se ha sido riguroso para permitir que las conclusiones puedan ser generalizadas sin perder validez. En particular la orientación del campo $\vec{\mathcal{E}}$ puede ser cualquiera, en tanto cumpla con la premisa de tener el mismo valor en todos los puntos de un plano; por tanto, la orientación de ese plano también puede ser cualquiera. Debido a la linealidad del operador de derivación espacial, ∇, es posible cambiar de un sistema de coordenadas a otro sin que se afecten los resultados; esto significa que los resultados son independientes del sistema de coordenadas utilizado por lo que estamos en libertad de elegir en cada caso aquel que conduzca a las expresiones más sencillas sin sacrificar la validez de los mismos. Así mismo se ha hecho uso de la linealidad del medio para intercambiar las operaciones de derivación espacial y temporal, en el desarrollo de la ecuación de propagación. Esto a su vez permitirá extrapolar los resultados obtenidos al caso de otros medio lineales, a pesar de haber basado la deducción en el espacio libre. Este modelo de campo recibe el nombre de onda plana infinita debido precisamente a que tanto $\vec{E}$ como $\vec{H}$ yacen en un plano de extensión infinita perpendicular a la dirección de propagación. Sin embargo, no se debe perder de vista las limitaciones del modelo. Una onda plana infinita es sólo una aproximación a la realidad.

Estrictamente hablando, la onda plana infinita no existe, porque conllevaría una potencia infinita. En efecto, el vector de Poynting definido en (1.24) vale, para la onda progresiva,

$$\vec{\mathcal{S}} = \vec{\mathcal{E}} \times \vec{\mathcal{H}} = f_2(z,t)\hat{u} \times \frac{1}{\eta_0} f_2(z,t)\,\hat{v}$$

$$\vec{\mathcal{S}} = f_2(z,t)\frac{1}{\eta_0} f_2(z,t)\,\hat{u} \times \hat{v} = \frac{1}{\eta_0} f_2^2(z,t)\hat{k}$$

La potencia transferida a través de la superficie viene dada por (1.26)

$$P_f = \iint \vec{\mathcal{S}} \cdot d\vec{S} = \iint \frac{1}{\eta_0} f_2^2(z,t)\hat{k} \cdot ds\,\hat{k}$$

ya que el diferencial de superficie apunta en la dirección z.

$$P_f = \iint \frac{1}{\eta_0} f_2^2(z,t)ds \qquad (1.46)$$

Como el argumento de la integral de superficie es constante en el plano transversal, la integración sobre un plano infinito conduce a un resultado incompatible con la evidencia experimental. Resultados similares se obtienen para la onda regresiva (definida por $f_1(z,t)$). Sin embargo, el modelo de onda plana sigue siendo útil dentro de límites estrechos ya que muchas ondas pueden ser consideradas como localmente planas. Esto sería equivalente a la utilidad que tiene el modelo de Tierra Plana para el hombre que no pretende alejarse mucho de su casa.

Cuando se requiera considerar situaciones más generales será necesario utilizar otros modelos más complejos, como la onda esférica, que representen una mejor aproximación a la realidad. La utilidad práctica de estas ondas viajeras radica en que las mismas pueden ser utilizadas como portadoras para el transporte de información a grandes distancias (como en el caso de la televisión y la radio). La energía eléctrica producida en los centros de generación viaja a través de las líneas de transmisión en forma de ondas hasta los centros de consumo.

Frente de Onda. Se define como frente de onda una superficie en la cual los campos presentan el mismo retardo de propagación respecto a una referencia dada. En el caso de la onda plana infinita el frente onda es un plano infinito en el cual el campo eléctrico tiene mismo valor, en magnitud y dirección, pero en otros casos la magnitud e incluso la dirección del campo pudiesen ser diferentes mientras se mantenga la condición del retardo constante.

1-6.2 Ondas viajeras en medios lineales simples

Cuando se substituyen las relaciones constitutivas para medios lineales (1.15) en las ecuaciones de Maxwell, se obtienen resultados equivalentes a las expresiones (1.35) y (1.36). En particular,

si se hace σ=0 las expresiones son idénticas, con la salvedad que μ reemplaza a μ_0 y ε reemplaza a ε_0. La ecuación de propagación (1.37) se transforma en

$$\nabla^2 \vec{\mathcal{E}} - \mu\epsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{\mathcal{E}} = 0 \tag{1.47}$$

por lo que las conclusiones son similares a las obtenidas para el caso de la onda plana: las soluciones son ondas viajeras.

Para el caso de la onda plana infinita los resultados son similares, excepto que la velocidad de propagación es ahora,

$$v = \frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{1}{\sqrt{\mu\,\varepsilon}} \tag{1.48}$$

Y la impedancia intrínseca es,

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \tag{1.49}$$

Cuando se consideran valores finitos de σ, las ecuaciones son

$$\nabla \times \vec{\mathcal{E}} = -\mu \frac{\partial \vec{\mathcal{H}}}{\partial t} \quad ; \quad \nabla \times \vec{\mathcal{H}} = \epsilon \frac{\partial \vec{\mathcal{E}}}{\partial t} + \sigma\, \vec{\mathcal{E}}$$

Si no hay corrientes impresas ni cargas libres, estas ecuaciones se pueden resolver de la misma manera que para el espacio libre: Se toma el rotor de la primera expresión,

$$\nabla \times \nabla \times \vec{\mathcal{E}} = -\nabla^2 \vec{\mathcal{E}} = \left(-\mu \frac{\partial \nabla \times \vec{\mathcal{H}}}{\partial t} \right) =$$

Se reemplaza en la segunda y se tiene finalmente,

$$\nabla^2 \vec{\mathcal{E}} - \mu\sigma \frac{\partial}{\partial t} \vec{\mathcal{E}} - \mu\epsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{\mathcal{E}} = 0 \tag{1.50}$$

El primer y tercer término son similares a los de la ecuación (1.47). El segundo término, llamado "término de relajación", es responsable de un decaimiento de las soluciones a medida que las ondas se alejan del origen, lo cual si está de acuerdo con la evidencia experimental. La ecuación (1.50) no se puede resolver directamente a menos que se conozca la dependencia temporal de los campos. En secciones posteriores se asumirá una dependencia sinusoidal de los campos para estudiar el comportamiento de las soluciones.

1-7. Potenciales Eléctrico y Magnético. Potenciales retardados.

Hasta el momento se ha trabajado con las variables $\vec{E}\ y\ \vec{H}$, que representan las cantidades Intensidad Eléctrica e Intensidad Magnética, respectivamente. La ecuaciones de Maxwell fueron resueltas en las secciones (1-6.1 y 1-6.2) asumiendo que no existen fuentes ni cargas libres. Sin embargo, cuando se consideran problemas de radiación en los cuales existen fuentes es más conveniente utilizar un conjunto de variables diferentes que simplifican las ecuaciones. Si estas nuevas variables se relacionan adecuadamente con $\vec{E}\ y\ \vec{H}$, será posible hallar las distribuciones de los campos a partir de las soluciones de las ecuaciones en las variables auxiliares.

Considérese de nuevo las ecuaciones de Maxwell

$$\nabla \times \vec{\mathcal{E}}(x,y,z,t) = -\frac{\partial \vec{\mathcal{B}}(x,y,z,t)}{\partial t} \quad ; \quad \nabla \cdot \vec{\mathcal{B}}(x,y,z,t) = 0$$

$$\nabla \times \vec{\mathcal{H}}(x,y,z,t) = \frac{\partial \vec{\mathcal{D}}(x,y,z,t)}{\partial t} + \vec{\mathcal{J}} \quad ; \quad \nabla \cdot \vec{\mathcal{D}}(x,y,z,t) = q_v(x,y,z,t)$$

Una definición conveniente para una variable auxiliar es,

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \tag{1.51}$$

Ya que la divergencia de $\vec{B}$ es igual a 0.

El vector $\vec{A}$ recibe el nombre de **potencial vectorial magnético**. Al sustituir en la primera ecuación de (1.1) se tiene,

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\nabla \times \vec{A} \tag{1.52}$$

es decir,

$$\nabla \times \left(\vec{E} + \frac{\partial}{\partial t}\vec{A}\right) = 0 \tag{1.53}$$

Cualquier vector cuyo rotacional es cero es el gradiente de una función escalar,

$$\vec{E} + \frac{\partial}{\partial t}\vec{A} = -\nabla\phi \tag{1.54}$$

El escalar ϕ recibe el nombre de potencial escalar eléctrico.

Para obtener una ecuación para $\vec{A}$ se sustituye (1.51) y (1.54) en la primera de (1.2) asumiendo que el medio es lineal simple.

$$\frac{1}{\mu}\nabla \times \vec{B} = \frac{\partial}{\partial t}\epsilon\vec{E} + \vec{J}$$

$$\frac{1}{\mu}\nabla \times \nabla \times \vec{A} = \vec{J} + \epsilon\frac{\partial}{\partial t}\left(-\nabla\phi - \frac{\partial}{\partial t}\vec{A}\right)$$

$$\frac{1}{\mu}\left(\nabla\left(\nabla\cdot\vec{A}\right)-\nabla^2\vec{A}\right)=\vec{J}-\epsilon\frac{\partial}{\partial t}\nabla\phi-\left(\epsilon\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t}\vec{A}\right)$$

Hasta el momento sólo se ha especificado el rotor de $\vec{A}$, por lo que aún estamos libres para escoger la divergencia. Para simplificar la ecuación anterior vamos a hacer,

$$\tfrac{1}{\mu}\left(\nabla\cdot\vec{A}\right)=-\epsilon\tfrac{\partial}{\partial t}\phi \qquad (1.55)$$

Esta es la llamada **condición de Lorentz**. En consecuencia,

$$\frac{1}{\mu}\left(-\nabla^2\vec{A}\right)=\vec{J}-\left(\epsilon\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t}\vec{A}\right)$$

$$\nabla^2\vec{A}-\mu\epsilon\tfrac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{A}=-\mu\vec{J} \qquad (1.56)$$

Esta ecuación es similar a la (1.37) a excepción de las fuentes que aparecen del lado derecho. De la segunda ecuación (1.2) se tiene que,

$$\epsilon\,\nabla\cdot\vec{E}=q_v$$

La sustitución en (1.54) produce

$$\nabla\cdot\left(-\frac{\partial}{\partial t}\vec{A}-\nabla\phi\right)=\frac{1}{\epsilon}q_v$$

$$-\nabla^2\phi-\frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla\cdot\vec{A}\right)=\frac{1}{\epsilon}q_v$$

Y al sustituir (1.55) se obtiene finalmente,

$$\nabla^2\phi-\mu\epsilon\tfrac{\partial^2}{\partial t^2}\phi=-\tfrac{1}{\epsilon}q_v \qquad (1.57)$$

Una vez hallados A y ϕ los campos *E* y *H* se hallan directamente de (1.53) y (1.54) como sigue,

$$\vec{\mathcal{E}}=-\frac{\partial}{\partial t}\vec{A}-\nabla\phi=-\frac{\partial}{\partial t}\vec{A}+\frac{1}{\mu\epsilon}\int\nabla\left(\nabla\cdot\vec{A}\right)dt$$

$$\vec{\mathcal{H}}=\frac{1}{\mu}\nabla\times\vec{A}$$

La solución de (1.56) y (1.57) produce una solución natural y una solución forzada. La solución natural es similar a la ya obtenida para (1.37), es decir, ondas viajeras. Para hallar la solución forzada consideremos en primer lugar una fuente de corriente puntual ubicada en el origen de coordenadas. Como lo establece (1.56), el vector $\vec{A}$ tiene la dirección de la fuente; sin embargo, su magnitud deberá ser hallada resolviendo la ecuación, sujeta a la condición de frontera que impone la fuente. En todos los puntos del espacio, excepto en el origen la ecuación (1.56) se

reduce a la ecuación de propagación y resulta conveniente, por razones de simetría, escoger un sistema de coordenadas esféricas para resolver dicha ecuación.

Considérese un sistema de coordenadas esféricas cuyo eje polar coincide con el eje "z" de coordenadas rectangulares. Entonces será posible transformar la ecuación vectorial de propagación en una ecuación escalar como sigue,

$$\vec{A}(r,\theta,\varphi) = a(r,\theta,\varphi)\,\hat{k}$$

entonces,

$$\nabla^2 a - \mu\varepsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} a = 0 \text{ , (excepto en el origen)}$$

Debido a que se trata de una fuente puntual, es de esperarse que "a" tenga simetría esférica y por tanto no depende de θ ni de φ. Con esta condición, el Laplaciano en coordenadas esféricas se reduce a:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial a}{\partial r}\right) - \mu\varepsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} a = 0 \tag{1.58}$$

Las soluciones son de la forma

$$a = \frac{1}{r} f\left(\sqrt{\mu\varepsilon}\, r \pm t\right) \tag{1.59}$$

Para demostrarlo se hará el cambio de variables

$$s = \sqrt{\mu\varepsilon}\, r \pm t$$

Las derivadas se calculan como sigue,

$$\frac{\partial a}{\partial r} = -\frac{1}{r^2} f(s) + \frac{1}{r}\frac{df}{ds}\frac{\partial s}{\partial r} = -\frac{1}{r^2} f(s) + \frac{1}{r}\frac{df}{ds}\sqrt{\mu\varepsilon}$$

$$r^2 \frac{\partial a}{\partial r} = -f(s) + r\frac{df}{ds}\sqrt{\mu\varepsilon}$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial a}{\partial r}\right) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(-f(s) + r\frac{df}{ds}\sqrt{\mu\varepsilon}\right) =$$

$$= \frac{1}{r^2}\left(-\frac{df}{ds}\sqrt{\mu\varepsilon} + \frac{df}{ds}\sqrt{\mu\varepsilon} + r\frac{d^2 f}{ds^2}\mu\varepsilon\right) = \frac{1}{r}\frac{d^2 f}{ds^2}\mu\varepsilon$$

Por otra parte, para cualquier signo,

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} a = \frac{1}{r}\frac{d^2 f}{ds^2}$$

lo cual al sustituir en (1.58) satisface la ecuación. En las soluciones (1.59), la expresión con el signo negativo corresponde a una onda que se aleja del origen en el sentido positivo de las "r", en tanto que la otra representa a una onda que se desplaza hacia el origen de coordenadas. Estas soluciones, denominadas ondas esféricas, son válidas en todos los puntos del espacio excepto en el origen, pues al hacerse r=0 el valor de "a" queda indeterminado. Por otra parte, si no existen fuentes externas que irradien en la dirección del origen debemos despreciar la solución regresiva. Utilizando los mismos argumentos se halla que el potencial escalar eléctrico presenta soluciones similares, siendo su fuente una carga puntual ubicada en el origen de coordenadas esféricas.

Para entender el significado de las soluciones se estudiará el comportamiento de $\vec{A}$ en dos puntos del espacio, y en dos tiempos diferentes. Si se siguen los mismos pasos que condujeron a la ecuación (1.41) se halla que,

$$r\,\vec{A}(r,t) = (r+\Delta r)\,\vec{A}(r-\Delta t, t-\Delta t)$$

Esto significa que los potenciales vectoriales $\vec{A}$ sufren un retardo de tiempo al pasar del punto "r" al "r+Δr", y además presentan una disminución de amplitud proporcional a la relación de las distancias al origen de ambos puntos. Una conclusión similar se aplica a los potenciales escalares. La velocidad de propagación es, similarmente al caso de la onda plana, $1/\sqrt{\mu\varepsilon}$. En estas condiciones se acostumbra denotar a $\vec{A}$ y ϕ con el nombre de potenciales retardados para enfatizar el hecho de que los efectos producidos por una fuente se aprecian en otros puntos del espacio al cabo de un cierto tiempo, el cual es consecuencia de la velocidad de propagación finita de la onda.

Si se considera una distribución de fuentes será necesario superponer los efectos individuales de cada una de ellas.

Primeramente es necesario calcular la magnitud del vector potencial magnético en función de las corrientes impresas. Para ello vamos a considerar un pequeño cilindro que rodee a la fuente de corriente elemental. La ecuación (1.56) es válida para cualquier función continua de tiempo y espacio. Si se consideran variaciones lentas, las derivadas temporales se podrán despreciar frente a los otros términos: en este caso la ecuación de propagación se reduce a la ecuación de Poisson que tiene por solución:

$$a = \frac{\mu I\, l}{4\pi r}$$

donde “I” es la corriente circulante y “*l*” es la longitud de dicho elemento de corriente como se muestra en el dibujo.

Para demostrarlo se hace uso del teorema de la divergencia, que dice que para cualquier vector F:

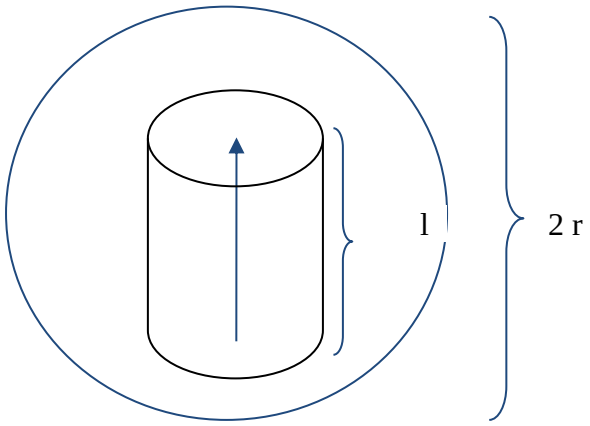
$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{s} = \iiint_V \nabla \cdot \vec{F}\, dv$$

Como el Laplaciano de un escalar es la divergencia del gradiente, entonces la ecuación de propagación se puede reescribir como:

$$\nabla \bullet (\nabla a) = -\mu J$$

$$\iiint_V \nabla \bullet (\nabla a) dv = -\mu \iiint_V J\, dv = \iint_S \nabla a \bullet ds$$

Se escoge como volumen de integración una esfera de radio “r”, la cual incluye a un cilindro de alto “l” y área “s”



Se usa la esfera para la integral del potencial y el cilindro para la corriente ya que J vale cero fuera del cilindro. En consecuencia, y como el gradiente de “a” no depende de los ángulos, se tiene

$$|\nabla a| 4\pi r^2 = -\mu I l$$

La corriente “I” es igual al producto de la densidad de corriente “J” por el área de la base del cilindro y, a su vez, el producto de esta última por la altura del cilindro “l” representa el volumen del cilindro elemental, v. Finalmente, como el gradiente es sólo $\partial a / \partial r$, el valor de “a” se halla por integración:

$$a = \frac{\mu}{4\pi}\frac{J}{r}v$$

(Hay que recordar que esta deducción se basó en suponer el campo como cuasi-estático lo que permitió obviar la dependencia temporal en un entorno muy cercano a la fuente. Para el resto del espacio debemos usar la expresión 1.59). Si ahora, se considera una distribución de fuentes habrá que realizar una integración sobre un volumen que contenga a dichas fuentes.

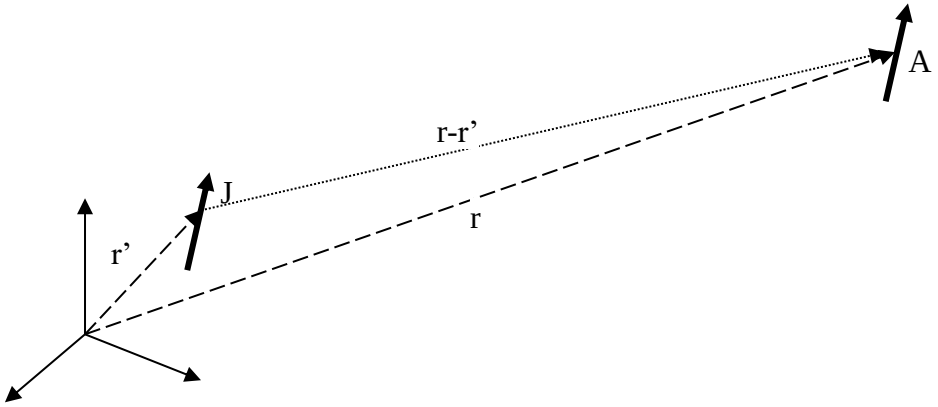


Figura 1. Coordenadas de la fuente y del punto remoto

Si $\vec{r}$ es el radio vector correspondiente a un punto del espacio, y $\overrightarrow{r'}$ es el correspondiente a una fuente cualquiera, entonces su contribución al campo será:

$$d\vec{A}(r,t) = \frac{\mu}{4\pi}\frac{\vec{J}(t-\sqrt{\mu\epsilon}\ \left|\vec{r}-\overrightarrow{r'}\right|}{\left|\vec{r}-\overrightarrow{r'}\right|}\ dv'$$

Donde "v'" es un diferencial de volumen en el espacio "**r´** " de las fuentes, y el campo total se halla superponiendo todas las contribuciones

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu}{4\pi}\iiint_{v'}\frac{\vec{J}(t-\sqrt{\mu\epsilon}\left|\vec{r}-\overrightarrow{r'}\right|}{\left|\vec{r}-\overrightarrow{r'}\right|}\ dv' \qquad (1.60)$$

Similarmente, el potencial escalar debido a las cargas será:

$$\phi(r,t) = \frac{1}{4\pi\epsilon}\iiint_{v'} \frac{q_v\left(t - \sqrt{\mu\epsilon}\,\left|\vec{r} - \overrightarrow{r'}\right|\right)}{\left|\vec{r} - \overrightarrow{r'}\right|}\, dv' \tag{1.61}$$

1-8. Ecuaciones de Maxwell sobre una trayectoria. Teoría de rayos.

Hasta el momento se ha considerado un caso particular descrito bajo el modelo de ondas plana infinita que demuestra que las soluciones de las ecuaciones de Maxwell corresponden a ondas en movimiento y que se mueven en línea recta perpendicularmente al plano definido por los vectores E y H. Sin embargo, aparte del problema de tratar con magnitudes infinitas, este modelo no permite tratar con situaciones locales. El modelo de rayos permite tratar con magnitudes mucho más pequeñas y más manejable. De esta manera el campo radiado se puede considerar como un sinnúmero de trayectorias a través de las cuales fluyen de manera independiente las ondas electromagnéticas. Si en algún punto del espacio algunas de estas trayectorias confluyen el campo total deberá sumar todas las contribuciones fasorialmente debido a los diferentes retrasos de fase que tienen cada una de las componentes.

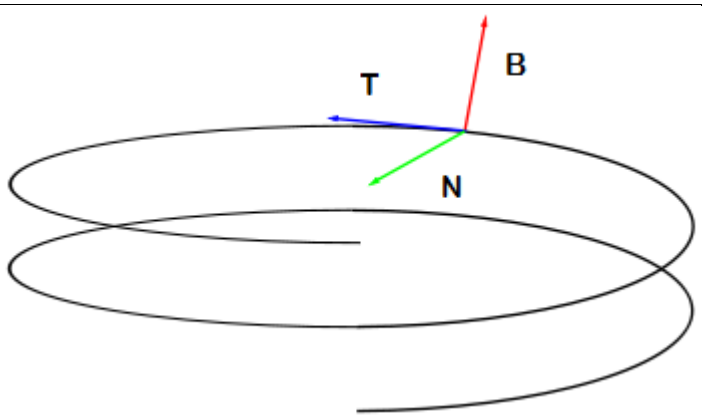
Un rayo se define como una trayectoria generalizada en 4D sobre la cual se propaga una onda electromagnética. No tiene sección transversal y se describe en términos de una única dimensión denominada longitud del arco, s.

Para efectos de este estudio y para utilizar la descripción normal de las ecuaciones de Maxwell, la trayectoria se describirá en 3D y el tiempo se parametrizará también en función de "s" a la usanza relativista. De esta manera, las cuatro dimensiones quedarán descritas como:

$$\begin{cases} x = x(s) \\ y = y(s) \\ z = z(s) \\ t = t(s) \end{cases}$$

De esta manera el vector de posición vale $\vec{r}(s) = x(s)\hat{\imath} + y(s)\hat{\jmath} + z(s)\hat{k}$

Dada una curva parametrizada $\vec{\boldsymbol{r}}(u)$ según un parámetro cualquiera "u" , se definen los llamados vector tangente, normal y binormal como:

$T(u) = N(u) \times B(u)$ $B(u) = T(u) \times N(u)$ $N(u) = B(u) \times T(u)$ Estos tres vectores son unitarios y perpendiculares entre sí, juntos configuran un sistema de referencia móvil conocido como **Triedro de Frênet-Serret** a raíz del estudio de Jean Frenet y Joseph Serret	

Es interesante que para una partícula física desplazándose en el espacio, el vector tangente es paralelo a la velocidad, mientras que el vector normal da el cambio dirección por unidad de tiempo de la velocidad o aceleración normal. Si la curva está parametrizada según la longitud de arco, las fórmulas pueden simplificarse a:

$$\hat{T}(s) = \frac{d\vec{r}(s)}{ds} \qquad \hat{N}(s) = \frac{1}{\chi(s)} \frac{d\,\hat{T}(s)}{ds} \qquad \hat{B}(S) = \frac{1}{\tau(s)} \left(\frac{d\,\hat{N}(s)}{ds} + \chi\,\hat{T}(s) \right)$$

Aunque la curvatura, χ y la torsión, τ, pueden obtenerse en función de cualquier parámetro, para el caso particular de la longitud de arco se reducen a:

$$\chi(s) = \|\vec{r}''(s)\| \qquad \tau(s) = \frac{\vec{r}'(s) \cdot (\vec{r}''(s) \times \vec{r}'''(s))}{\|\vec{r}''(s)\|^2}$$

Entonces, la curvatura por ser una derivada segunda respecto del espacio, está relacionada con el Laplaciano.

Reescribamos la ecuación de propagación para un medio general donde μ y ε pueden variar, pero sin fuentes

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\,\mu\vec{H}$$

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{\partial}{\partial t}\epsilon\vec{E}$$

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\nabla \times \left(\mu\vec{H}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}\mu\nabla \times \vec{H}$$

Desarrollemos las operaciones indicada a ambos lados de la igualdad, asumiendo μ=cte, pero permitiendo que ε pueda variar,

$$\nabla\left(\nabla \cdot \vec{E}\right) - \nabla^2\,\vec{E} = -\mu\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t}\epsilon\vec{E}$$

$$\nabla^2 \vec{E} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E} = \nabla\left(\nabla \cdot \vec{E}\right)$$

Por otra parte $\nabla \cdot \left(\epsilon \vec{E}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla\epsilon \cdot \vec{E} = -\epsilon\, \nabla \cdot \vec{E}$ Entonces $\nabla \cdot \vec{E} = -\frac{\nabla\epsilon}{\epsilon} \cdot \vec{E}$

Como ∇ es una derivada direccional y sólo hay un grado de libertad para los campos, se tiene que

$$\nabla = \hat{T}\, \frac{d}{ds} \qquad \text{(sólo para los campos)}$$

Si el medio es homogéneo el segundo miembro de la igualdad es cero de manera que

$$\frac{d^2}{ds^2} \vec{E} - \mu\epsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E} = 0$$

Con la usual interpretación de una onda en movimiento. Como el tiempo también fue parametrizado, su derivada vale $\frac{\partial}{\partial t} = \frac{1}{dt/ds} \frac{d}{ds} = v\, \frac{d}{ds}$ y por tanto

$$\frac{d^2}{ds^2} \vec{E} - \mu\epsilon\, v^2 \frac{d^2}{ds^2} \vec{E} = 0$$

Por tanto, la velocidad v a que se mueve la onda a lo largo de la curva es $v = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$. La trayectoria será rectilínea por cuanto el ángulo entre $\vec{E}$ y $\hat{T}$ se mantendrá en $\pi/2$. En consecuencia, el modo de propagación es TEM (transversal electro-magnético). Esto es cierto aún en el caso de que el medio fuera inhomogéneo, es decir, el modo es TEM debido a que el campo se mantiene perpendicular a la dirección de propagación; si hubiese una componente no cero en la dirección de propagación es producida por un cambio en las características del medio de propagación, lo que se conoce como <u>deformación del espacio-tiempo</u>.

Al tomar el gradiente se obtiene $\nabla\left(\nabla \cdot \vec{E}\right) = -\nabla\left(\frac{\nabla\epsilon}{\epsilon} . \vec{E}\right)$. Si este valor es diferente de cero indica que habría una componente de E en la dirección de propagación y en consecuencia ya no mantiene la condición de perpendicularidad por lo que el rayo se desvía.

$$\hat{T}\, \frac{d}{ds} \left(\hat{T} \cdot \frac{d}{ds} \vec{E}\right) = \hat{T} \left(\frac{d\hat{T}}{ds} \cdot \vec{E} + \hat{T} \cdot \frac{d^2}{ds^2} \vec{E}\right)$$

$$-\nabla\left(\frac{\nabla\epsilon}{\epsilon} . \vec{E}\right) = -\hat{T}\, \frac{d}{ds}\left(\frac{\nabla\epsilon}{\epsilon} . \vec{E}\right) = \hat{T}\left(\chi\, \hat{N} \cdot \vec{E} + \hat{T} \cdot \frac{d^2}{ds^2} \vec{E}\right)$$

Como T es un vector unitario se podrá escribir que

$$\frac{d}{ds}\left(-\frac{\nabla\epsilon}{\epsilon} . \vec{E}\right) = \left(\chi\, \hat{N} \cdot \vec{E} + \hat{T} \cdot \frac{d^2}{ds^2} \vec{E}\right)$$

Como ya se indicó anteriormente que el modo es TEM, el último sumando en el paréntesis es cero. Por tanto,

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{-\nabla\epsilon}{\epsilon}.\vec{E}\right) = \chi\,\hat{N}\cdot\vec{E}$$

En consecuencia, si el gradiente de la permitividad no es nulo habrá una curvatura χ que hará que la trayectoria se desvíe en la dirección del gradiente (debido al producto interno). Dicho de otra manera, el cambio por unidad de longitud (del rayo) de la proyección del campo sobre el gradiente de permitividad corresponde a la curvatura de dicho rayo. Volveremos sobre este punto más adelante cuando se consideren señales sinusoidales donde se vinculará esta rata de cambio a la constante de fase de la onda. Por ejemplo, si la onda se estuviera propagando en la dirección del gradiente de ϵ, $\vec{E}$ sería perpendicular a dicho gradiente y también a $\hat{T}$, por lo que χ sería nulo y la trayectoria sería rectilínea. Por el contrario, el efecto de desviación será máximo cuando el campo eléctrico esté alineado con el gradiente de ϵ.

La teoría de rayos es la base de la llamada óptica geométrica la cuál es una aproximación razonable del comportamiento de las ondas electromagnéticas cuando las dimensiones a considerar son mucho mayores que la longitud de la onda ya que se ha supuesto que cada rayo no tiene dimensiones transversales y en consecuencia no interfiere con otros rayos vecinos de manera que no es necesario considerar la fase para obtener el campo total. Sin embargo, la teoría falla en aquellas regiones del espacio donde confluyen una gran cantidad de rayos y se producen interferencias tanto destructivas como constructivas debido a las relaciones de fase entre ellos. La teoría de rayos se basa en el principio de Fermat que establece qué: "*El trayecto seguido por la luz al propagarse de un punto a otro es tal que el tiempo empleado en recorrerlo es estacionario respecto a posibles variaciones de la trayectoria*", por lo que dichas trayectorias constituyen eikonales y pueden describirse en base al cálculo variacional.

1-9 Variaciones sinusoidales. Ecuaciones complejas.

Un caso común para el ingeniero es considerar magnitudes que varían sinusoidalmente en el tiempo. Más aún, a través de la Serie de Fourier o de la Transformada de Fourier, una función cualquiera del tiempo puede ser representada por la superposición de sinusoides. Estas variables sinusoidales pueden ser representadas en términos de exponenciales complejas a través del Teorema de Moivre.

Considérese una función del tiempo $f(t) = F\cos(\omega t + \varphi)$. Dicha función puede representarse como,

$$f(t) = F\cos(\omega t + \varphi) = F\,\Re\left(e^{j\omega t}\right)$$

Debido a que el operador "parte real" es lineal, y "*F*" es un número real, se puede introducir en el argumento de dicha función,

$$f(t) = \Re\left[F\,e^{j(\omega t+\varphi)}\right] = \Re\left[\sqrt{2}\,\mathrm{F}\,e^{j\omega}\right] \qquad (1.62)$$

donde se ha definido un número complejo "F" como

$$\sqrt{2}\,\mathrm{F} = F\,e^{j\varphi} \qquad (1.63)$$

Este número complejo se denomina un **fasor**. Si bien las variables físicas son reales, la representación fasorial es muy conveniente porque simplifica extraordinariamente los cálculos cuando se trata de variables sinusoidales. Finalmente, para obtener las variables verdaderas sólo hay que realizar la operación indicada en (1.61). El coeficiente $\sqrt{2}$ ha sido incluido para trabajar con valores eficaces de la variable, ya que éstos son los reportados por los equipos de medición. De esta manera todas las variables de campo pueden ser convertidas a representación fasorial y las ecuaciones pueden ser rescritas en términos de las nuevas variables para simplificar los cálculos. Los vectores serán:

$$\vec{E}(x,y,z,t) = \Re\left[\sqrt{2}\,\vec{\mathrm{E}}(x,y,z)\,e^{j\omega t}\right] \qquad (1.64)$$

$$\vec{H}(x,y,z,t) = \Re\left[\sqrt{2}\,\vec{\mathrm{H}}(x,y,z)\,e^{j\omega t}\right] \qquad (1.65)$$

$$\vec{D}(x,y,z,t) = \Re\left[\sqrt{2}\,\vec{\mathrm{D}}(x,y,z)\,e^{j\omega t}\right] \qquad (1.66)$$

$$\vec{B}(x,y,z,t) = \Re\left[\sqrt{2}\,B(x,y,z)\,e^{j\omega t}\right] \qquad (1.67)$$

$$\vec{J}(x,y,z,t) = \Re\left[\sqrt{2}\,\vec{\mathrm{J}}(x,y,z)\,e^{j\omega t}\right] \qquad (1.68)$$

$$\vec{A}(x,y,z,t) = \Re\left[\sqrt{2}\,\vec{\mathrm{A}}(x,y,z)\,e^{j\omega t}\right] \qquad (1.69)$$

y similarmente los escalares,

$$q_v(x,y,z,t) = \Re\left[\sqrt{2}\,\mathrm{q}_v(x,y,z)\,e^{j\omega t}\right] \qquad (1.70)$$

$$\phi(x,y,z,t) = \Re\left[\sqrt{2}\,\phi(x,y,z)\,e^{j\omega t}\right] \qquad (1.71)$$

Las operaciones de derivación temporal resultan particularmente sencillas en el caso fasorial. Considérese de nuevo la variable *f*(t) de la ecuación y tómese la derivada respecto al tiempo, *g*(t)=d/dt *f*(t)

$$g(t) = \frac{d}{dt} f(t) = \frac{d}{dt} \mathrm{Re}\left[\sqrt{2}\,\mathrm{F} e^{j\omega t}\right] = \mathrm{Re}\left[\frac{d}{dt}\left(\sqrt{2}\,\mathrm{F} e^{j\omega t}\right)\right] = \mathrm{Re}\left[\sqrt{2}\,\mathrm{F}\frac{d}{dt} e^{j\omega t}\right] =$$
$$= \mathrm{Re}\left[\sqrt{2}\; j\omega \mathrm{F} e^{j\omega t}\right] = \mathrm{Re}\left[\sqrt{2}\,\mathrm{G} e^{j\omega t}\right]$$

donde se ha definido un nuevo fasor G. Esto quiere decir que, en lo referente a las variables fasoriales, la operación de derivación temporal es equivalente a una multiplicación por jω.

En términos de las nuevas variables se pueden escribir las ecuaciones de Maxwell como,

$$\nabla \times \vec{E} = -j\omega \vec{B} \quad ; \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0 \tag{1.72}$$

$$\nabla \times \vec{H} = j\omega \vec{D} + \vec{J} \quad ; \quad \nabla \cdot \vec{D} = q_v \tag{1.73}$$

La ecuación de propagación (1.37) se convierte en,

$$\nabla^2 \vec{E} + \omega^2 \mu\epsilon\, \vec{E} = 0 \tag{1.74}$$

la cual es la conocida ecuación de Helmholtz. El término $\omega^2 \mu\varepsilon$ aparece frecuentemente en las ecuaciones de onda, así que amerite que se le dé un nombre especial, "el número de onda", *k*,

$$k^2 = \omega^2 \mu\varepsilon \tag{1.75}$$

Para el caso del vacío se tiene,

$$k_0^2 = \omega^2\ \mu_0\ \varepsilon_0 \tag{1.76}$$

Si se aplica la ecuación de Helmholtz al modelo de onda plana infinita, se tiene que la ecuación escalar (1.39) se transforma en,

$$\frac{d^2}{dz^2} E(z) + k_0^2 E(z) = 0 \tag{1.77}$$

Nótese que ahora se trabaja con derivadas totales. La ecuación (1.77) tiene por soluciones exponenciales complejas,

$$e^{-j\,k_0 z} \quad y \quad e^{j\,k_0 z}$$

La primera de ellas representa la onda progresiva y la segunda a la onda regresiva. De manera que, en general,

$$E(z) = E_0^+\ e^{-j\,k_0 z}\ \hat{\mathbf{t}} + E_0^-\ e^{j\,k_0 z}\ \hat{\mathbf{t}} \tag{1.78}$$

donde E_0^+ *y* E_0^- son, respectivamente, los valores que asumen las onda progresiva y la regresiva en el origen de coordenadas. Si E_0^- es cero, entonces sólo existe la onda progresiva.

Una vez hallado el campo eléctrico, se puede hallar el campo magnético a partir de la ecuación (1.72),

$$\nabla \times \vec{E} = -j\omega\mu\,\vec{H}$$

$$\vec{H} = \frac{j}{\omega\mu}\,\nabla \times \vec{E} = \frac{j}{\omega\mu}\,\nabla \times \left(E_0^+\, e^{-jk_0\,z}\,\hat{t} + E_0^-\, e^{jk_0\,z}\,\hat{t}\right) =$$

$$= \frac{j}{\omega\mu}\left(\frac{d}{dz}\,\hat{k}\right) \times \left(E_0^+\, e^{-jk_0\,z}\,\hat{t} + E_0^-\, e^{jk_0\,z}\,\hat{t}\right)$$

$$= \frac{j}{\omega\mu}\left(E_0^+\, e^{-jk_0\,z}\left(-jk_0\,\hat{k}\right) \times \hat{t} + E_0^-\, e^{jk_0\,z}\left(jk_0\,\hat{k}\right) \times \hat{t}\right)$$

$$\vec{H} = \frac{k_0}{\omega\mu}\left(E_0^+\, e^{-jk_0\,z} - E_0^-\, e^{jk_0\,z}\right)\hat{k} \times \hat{t}$$

Estas soluciones son equivalentes a las f_1 y f_2 halladas previamente para el caso de la onda plana. Para ello se realizará la operación indicada en (1.64),

$$\vec{E}(x,y,z,t) = \Re\left[\sqrt{2}\,\vec{E}(x,y,z)\,e^{j\omega t}\right] = \Re\left[\sqrt{2}\,E_0^+ e^{-jk_0 z}\,e^{j\omega t}\right]\hat{t}$$

$$= \sqrt{2}\,|E_0^+|\,cos(\omega t + \varphi^+ - k_0 z)\,\hat{t}$$

$$\vec{E}(x,y,z,t) = \mathrm{Re}\left[\sqrt{2}\vec{E}(x,y,z)e^{j\omega t}\right] = \mathrm{Re}\left[\sqrt{2}E_0^+\,e^{-jk_0 z}\,e^{j\omega t}\right]\hat{t} = \sqrt{2}\left|E_0^+\right|\cos\left(\omega t + \varphi^+ - k_0 z\right)\hat{t}$$

donde φ^+ es el ángulo de fase de E_0^+. Se aprecia que en este caso la función f_2 es el coseno. Al sustituir el valor de k_0 se tiene,

$$\cos\left(\varphi^+ + \omega t - \omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}\,z\right) = \cos\left(\varphi^+ + \omega\left(t - \sqrt{\mu_0\varepsilon_0}\,z\right)\right)$$

lo cual coincide con la definición de f_2 y por tanto representa una onda que se mueve en el sentido positivo de las "z". Todas las conclusiones anteriormente obtenidas para el caso general de la onda plana son por tanto aplicables a este caso particular de excitación sinusoidal. El término $\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}\,z$ representa un retraso de tiempo, lo cual está de acuerdo con la conclusión previa de que la onda emplea un cierto tiempo en moverse de un punto a otro del espacio (y en consecuencia se atrasa). La distancia recorrida por la onda que produce un atraso de fase de 2π radianes se conoce con el nombre de **longitud de onda**, λ, de manera que $\omega\sqrt{\mu\varepsilon}\,\lambda = k\lambda = 2\pi$

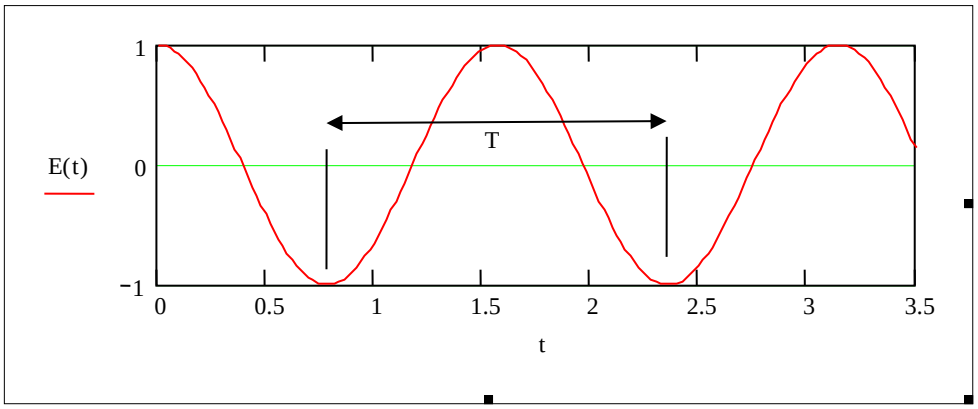


Figura 2. Variación temporal del campo

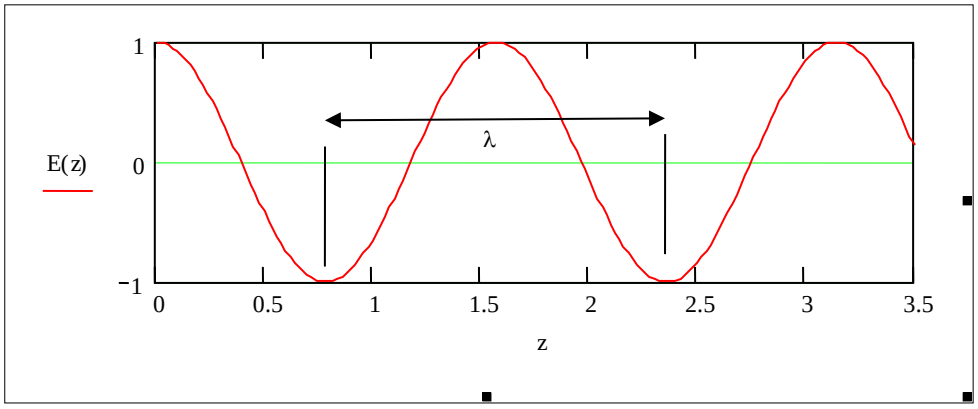


Figura 3. Variación espacial del campo

La velocidad de propagación puede expresarse en función del número de onda,

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} = \frac{\omega}{\omega\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} = \frac{\omega}{k_0} \tag{1.79}$$

en tanto que para otros medios lineales se tiene que,

$$\mathrm{v} = \frac{1}{\sqrt{\mu \varepsilon}} = \frac{\omega}{\omega\sqrt{\mu \varepsilon}} = \frac{\omega}{k} \tag{1.80}$$

Similarmente, las longitudes de onda serán respectivamente $\lambda_0 = 2\pi/k_0$ y $\lambda = 2\pi/k$

La velocidad definida por (1.79) o (1.80) corresponde a la rata de desplazamiento que tendría que tener un observador hipotético para observar una fase constante en la onda. En efecto, la fase instantánea de la onda es:

$$\varphi = \varphi^{+} + \omega\left(t - \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}\, z\right)$$

Si φ es constante, entonces al derivar respecto del tiempo se tiene,

$$\frac{d\varphi}{dt} = 0 = \omega \frac{d}{dt}\left(t - \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}\, z\right) \Rightarrow \frac{dz}{dt} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} = \frac{\omega}{k_0} = \mathrm{v}_f$$

En consecuencia v_f recibe el nombre de **velocidad de fase**.

En los sistemas de comunicaciones se trabaja con señales complejas que no son sinusoidales, pero que pueden ser representadas por una superposición de sinusoides. En estos casos interesa saber cuál es la velocidad a la cual se mueve la información. Esta es una especie de velocidad efectiva del grupo de ondas que transporta la información.

Considérese una onda modulada en AM/DSB, cuya representación en el tiempo es:

$$f(t) = A_c \cos\omega_c t \cos\omega_m t$$

donde ω_c es la frecuencia de la portadora sin modular, A_c su amplitud pico, y ω_m es la frecuencia de la moduladora. Al aplicar las identidades trigonométricas al producto de los cosenos se obtiene,

$$f(t) = \frac{1}{2} A_c \cos(\omega_c - \omega_m)t + \frac{1}{2} A_c \cos(\omega_c + \omega_m)t \qquad (1.81)$$

lo cual corresponde a la superposición de dos ondas de frecuencias (ω_c-ω_m) y (ω_c+ω_m) respectivamente. Al cabo de una distancia "z" ambas ondas se habrán retrasado en una cantidad que depende del número de onda *k*, es cual es función de la frecuencia. En los casos estudiados hasta ahora *k*(ω) es una función lineal de ω, pero para mayor generalidad se asumirá aquí una variación cualquiera. El valor de *k* a la frecuencia de cada una de estas sinusoides se puede hallar por una expansión en serie alrededor de la frecuencia de la portadora ya que normalmente $\omega_m << \omega_c$,

$$k(\omega_c - \omega_m) \cong k(\omega_c) - \omega_m \frac{dk}{d\omega} + \cdots \quad \textit{otros términos de orden superior}$$

$$k(\omega_c + \omega_m) \cong k(\omega_c) + \omega_m \frac{dk}{d\omega} + \cdots$$

Al sustituir en (1.81) se tiene

$$f(z,t) \cong \frac{1}{2} A_c \cos\left(\omega_c t - \omega_m t - z\left(k - \omega_m \frac{dk}{d\omega}\right)\right) + \frac{1}{2} A_c \cos\left(\omega_c t + \omega_m t - z\left(k + \omega_m \frac{dk}{d\omega}\right)\right)$$

$$f(z,t) \cong \frac{1}{2}A_c \cos\left(\omega_c\, t - \, z\, k - \omega_m\left(t - z\, \frac{dk}{d\omega}\right)\right) + \frac{1}{2}A_c \cos\left(\omega_c\, t - \, z\, k + \omega_m\left(t - z\, \frac{dk}{d\omega}\right)\right)$$

$$f(z,t) \cong \mathrm{A_c} \cos\left(\omega_c\, t - \, z\, k\right)\cos\left(\omega_m\left(t - z\, \frac{dk}{d\omega}\right)\right)$$

Ahora, si se desea observar una fase constante en la portadora bastaría con hacer $(\omega_c t - zk)$ constante; en consecuencia,

$$v_f = \frac{dz}{dt} = \frac{\omega_c}{k}$$

Por otra parte, si se desea observar una fase constante en la envolvente (la señal moduladora), entonces el argumento del coseno debe ser una constante. Al derivar e igualar a cero se tiene la siguiente definición para la **velocidad de grupo**,

$$v_g = \frac{dz}{dt} = \frac{1}{(dk/d\omega)} \tag{1.82}$$

Se puede demostrar adicionalmente, por medio de la definición del vector de Poynting que v_g es la velocidad a la que se propaga la energía en el medio. En el caso de la onda plana infinita ambas velocidades son iguales, pero en ciertas circunstancias pueden ser diferentes. Más aún, es posible en ciertas circunstancias que v_f sea mayor que la velocidad de la luz en el vacío, lo cual no contradice los principios de Einstein puesto que la velocidad de fase es sólo un concepto geométrico y no corresponde a ninguna magnitud física. Por otra parte, la velocidad de grupo si corresponde a una magnitud física (la propagación de la energía) y por tanto será siempre menor o igual a la velocidad de la luz.

1-9.1 Vector de Poynting complejo

En la expresión (1.24) se definió el vector de Poynting instantáneo como

$$\vec{E} \times \vec{H} = \vec{S}$$

Al trabajar con campos que varían sinusoidalmente en el tiempo es posible modificar esta definición a fin de poderla adaptar a las cantidades reportadas por los instrumentos de medición. En el caso de los campos, los instrumentos indican el valor r. m. s., en tanto que en la potencia la cantidad indicada es el valor medio.

El valor medio de la densidad de potencia que emana de un punto se obtiene al integrar el valor instantáneo a lo largo de un período y dividir el resultado por la duración de dicho período,

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T \vec{S}\, dt = \frac{1}{T}\int_0^T \vec{E} \times \vec{H}\, dt =$$

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T \vec{E}_{max} \cos(\omega t + \varphi_E) \times \vec{H}_{max} \cos(\omega t + \varphi_H)\, dt =$$

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{T}\vec{E}_{max} \times \vec{H}_{max} \int_0^T \cos(\omega t + \varphi_E) \cos(\omega t + \varphi_H)\, dt =$$

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{2T}\vec{E}_{max} \times \vec{H}_{max} \int_0^T \cos(2\omega t + \varphi_E + \varphi_H) + \cos(\varphi_E - \varphi_H)\, dt =$$

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{2T}\vec{E}_{max} \times \vec{H}_{max}\, T \cos(\varphi_E - \varphi_H)$$

$$\langle \vec{S} \rangle = \tfrac{1}{2}\vec{E}_{max} \times \vec{H}_{max}\ \cos(\varphi_E - \varphi_H) \qquad (1.83)$$

Si bien esta expresión produce el valor correcto de la potencia tiene el inconveniente de no poderse expresar directamente en términos del producto $\vec{E} \times \vec{H}$. Además se pierde la información sobre la energía almacenada en los campos (la cual se promedia a cero a lo largo del período). Sin embargo, si se define un nuevo vector $\vec{S}$ como el producto

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}^* \qquad (1.84)$$

entonces, se solucionan las limitaciones anteriores. En efecto, si se toma la parte real de $\vec{S}$ se obtiene

$$\Re[\vec{S}] = \Re[\vec{E} \times \vec{H}^*] = \Re[|\vec{E}| \times |\vec{H}|\, cos(\varphi_E - \varphi_H)]$$
$$= \frac{1}{2}\vec{E}_{max}\ \times \vec{H}_{max}\, cos(\varphi_E - \varphi_H)$$

lo cual es precisamente $\langle \vec{S} \rangle$, el valor medio de $\vec{S}$. La cantidad definida por la ecuación (1.84) recibe el nombre de vector de Poynting complejo.

De manera similar a la ecuación (1.22), vamos a calcular la divergencia del vector de Poynting complejo:

$$\nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}^*) = \vec{H}^* \cdot \nabla \times \vec{E} - \vec{E} \cdot \nabla \times \vec{H}^* \qquad (1.85)$$

En el caso de medios lineales simples,

$$\nabla \times \vec{E} = -j\omega\mu\, \overrightarrow{H} \quad y \quad \nabla \times \vec{H}^* = -j\omega\epsilon\, \vec{E}^* + \sigma\, \vec{E}^*$$

por lo que al sustituir en (1.84) se tiene,

$$\nabla \cdot \left(\vec{E} \times \vec{H}^*\right) = \vec{H}^* \cdot \left(-j\omega\mu\, \vec{H}\right) - \vec{E} \cdot \left(-j\omega\epsilon\, \vec{E}^* + \sigma\, \vec{E}^*\right)$$

es decir,

$$\nabla \cdot \left(\vec{S}\right) = -\sigma \left|\vec{E}\right|^2 - j\omega \left(\mu \left|\vec{H}\right|^2 - \epsilon \left|\vec{E}\right|^2\right) \qquad (1.86)$$

donde |E| y |H| son respectivamente los valores medios cuadráticos de los módulos de los vectores de campo.

Entonces, en la ecuación de balance energético se tiene que el primer sumando representa la energía disipada por ciclo, por unidad de volumen. Para interpretar el segundo sumando se sustituyen H y E en términos de los valores máximos y se obtiene,

$$-j\frac{4\pi}{T}\left(\frac{1}{2}\mu H_{max}^2 - \frac{1}{2}\epsilon E_{max}^2\right) = j\,\nabla \cdot \Im\left[\vec{S}\right] \qquad (1.87)$$

Por tanto, la parte imaginaria de "S" contiene información sobre la diferencia de las energías magnética y eléctrica almacenadas por ciclo de la onda en un punto.

Si se integra la divergencia de "S" en un volumen se obtendrá, de forma análoga a la ecuación (1.34), la ecuación de balance de energía total como

$$P_s = P_f + P_d + j\omega\left(W_e - W_m\right) \qquad (1.88)$$

donde P_s representa la potencia promedia compleja entregada por la fuente, P_f es la potencia promedio que emana del campo, P_d es la potencia disipada como calor y W_e y W_m son las energías almacenadas en los campos eléctrico y magnético por ciclo.

Cuando se aplica (1.84) al caso de la onda plana infinita en el espacio libre se tiene que,

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}^* = \vec{E} \times \left(\frac{1}{\eta_0}\, \hat{k} \times \vec{E}\right)^* = \left(\vec{E} \cdot \frac{1}{\eta_0}\, \vec{E}^*\right) \hat{k} = \frac{1}{\eta_0}|E|^2\, \hat{k}$$

para el caso de una onda que se propaga a lo largo del eje "z". En este caso se observa que la dirección de "S" es la misma de la propagación de la onda, y su magnitud es real. Esto último significa que las energías almacenadas en los campos son iguales (y por eso su diferencia es cero) debido a que η_0 (la impedancia intrínseca) es un número real. Cuando se estudian otro tipo de ondas, el valor de "S" puede utilizarse para definir una impedancia del medio, la cual puede ser compleja.

1-10. Polarización de las ondas electromagnéticas.

En la expresión (1.78) se consideró un vector unitario en la dirección del campo eléctrico. Tal vector unitario es perpendicular a la dirección de propagación **k** en el caso de una TEM, pero hasta el momento no se ha especificado la dirección de dicho vector en el plano transversal.

En muchas situaciones prácticas sucede que el comportamiento de las ondas puede ser distinto para orientaciones diferentes del campo eléctrico. Tal orientación ser definirá como **polarización** de la onda y se podrán identificar dos situaciones generales, y varias derivadas.

Se denominará **polarización lineal** la situación en la cual el campo eléctrico mantiene la misma orientación en el espacio a medida que la onda se propaga. Cuando la propagación ocurre en la atmósfera terrestre se acostumbra denominar polarización **vertical** u **horizontal** a las situaciones en las cuales el campo eléctrico mantiene respectivamente dichas orientaciones.

Una segunda situación a considerar es aquella cuando la orientación del vector intensidad de campo eléctrico cambia a medida que la onda se propaga. Esta situación se denomina **polarización elíptica**, y un caso particular de ella es la polarización **circular**. En ambos casos se distingue adicionalmente entre los dos sentidos de rotación del vector.

Una onda polarizada elípticamente puede considerarse como la superposición de ondas planas polarizadas linealmente. A la inversa, una onda de polarización lineal se puede hallar por la superposición de ondas polarizadas en forma elíptica. Esto halla aplicaciones en los filtros "polaroid" de fotografía o en los sistemas de lectura de los CD (discos compactos). Considérese la siguiente situación: dos ondas planas polarizadas linealmente, de la misma frecuencia, y moviéndose en la misma dirección. Ambas ondas difieren en polarización, amplitud y ángulo de fase.

El campo total será la suma,

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = E_1\,\hat{t}_1 + E_2\,\hat{t}_2$$

Por simplicidad se asumirá que las ondas se propagan en la dirección "z", y que los vectores $\mathbf{t}_1$ y $\mathbf{t}_2$ están respectivamente sobre los ejes **i** y **j**, aunque las conclusiones que se extraigan serán de carácter general. El campo instantáneo será,

$$\vec{E}(x,y,z,t) = \Re\left[\sqrt{2}\,E_{10}\,e^{j(-\beta z)}\,e^{j\omega t}\,\hat{\imath} + \sqrt{2}\,E_{20}\,e^{j(\varphi-\beta z)}\,e^{j\omega t}\,\hat{\jmath}\,\right]$$

donde E_{10} y E_{20} son las amplitudes r. m. s. de los campos y φ es la diferencia de fase. El término β, la constante de fase, es similar al número de onda, *k*, ya definido con anterioridad, pero es mucho más general y se definirá con más propiedad en la próxima sección.

$$\vec{E}(x,y,z,t) = \sqrt{2}\,E_{10}\,cos(\omega t - \beta z)\,\hat{\imath} + \sqrt{2}\,E_{20}\,cos(\omega t + \varphi - \beta z)\,\hat{\jmath} = E(x,y,z,t)\hat{t}$$

Los cosenos directores de **t** son:

$$t_x = \frac{\sqrt{2}E_{10}}{E}\cos(\omega t - \beta z) \tag{1.89}$$

$$\begin{aligned} t_y &= \frac{\sqrt{2}E_{20}}{E}\cos(\omega t + \varphi - \beta z) = \\ &= \frac{\sqrt{2}E_{20}}{E}\left(\cos(\omega t - \beta z)\cos\varphi - \sin(\omega t - \beta z)\sin\varphi\right) \end{aligned} \tag{1.90}$$

El valor del módulo es

$$E^2 = 2\left[E_{10}^2\left(\cos(\omega t - \beta z)\right)^2 + E_{20}^2\left(\cos(\omega t - \beta z)\cos\varphi - \sin(\omega t - \beta z)\sin\varphi\right)^2\right] \tag{1.91}$$

Si φ es igual a cero, entonces $|E| = \sqrt{E_{10}^2 + E_{20}^2}\,\cos(\omega t - \beta z)$ es una constante multiplicada por el propagador; igualmente, los cosenos directores son constantes. En consecuencia, la onda resultante tiene una orientación constante que depende sólo de la relación de magnitudes de las ondas componentes, E_{10}^2 y E_{20}^2. En cualquier caso, el ángulo α, del vector unitario **t** respecto al eje de coordenadas x depende del cociente de (1.90) entre (1.89),

$$\tan\alpha = \frac{t_y}{t_x} = \frac{E_{20}}{E_{10}}\frac{\cos(\omega t + \varphi - \beta z)}{\cos(\omega t - \beta z)} = \frac{E_{20}}{E_{10}}(\cos\varphi - \tan(\omega t - \beta z)\sin\varphi) \tag{1.92}$$

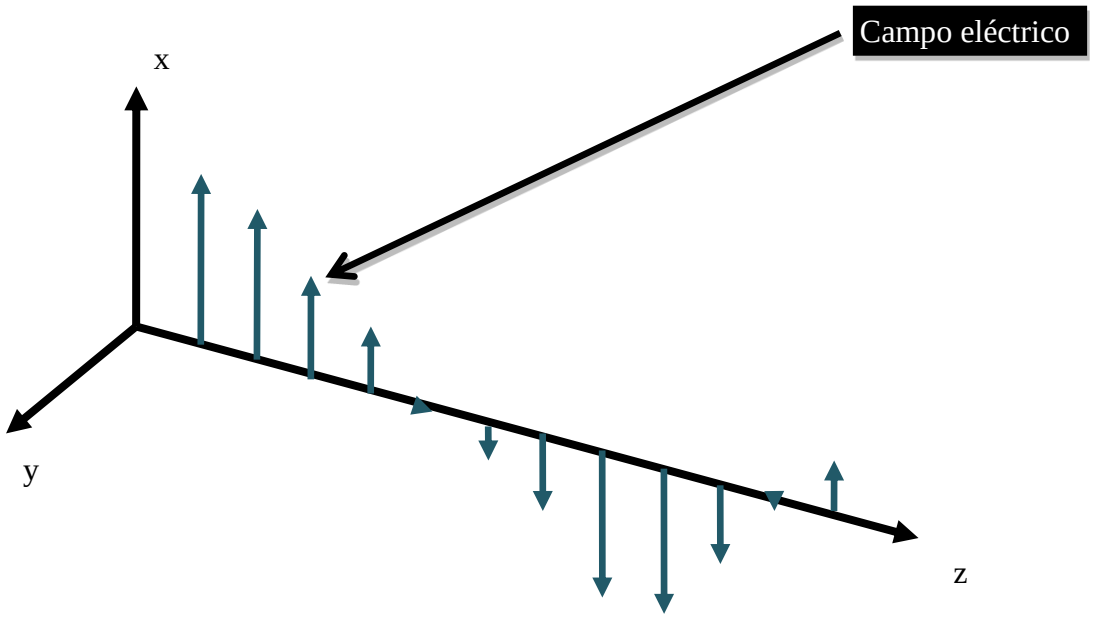


Figura 4.Onda con polarización plana

El caso φ=0 ya fue estudiado anteriormente y produce $\tan\alpha = \frac{E_{20}}{E_{10}}$.

Otro caso particular sencillo ocurre cuando E_{10}=E_{20}. Si, adicionalmente se considera la situación: φ=π/2 se tiene $\tan\alpha = -\tan(\omega t - \beta z)$. Una solución obvia a esta condición es $\alpha = -\omega t + \beta z$. A medida que transcurre el tiempo, el valor de α se hace cada vez más negativo, es decir que el vector unitario **t** gira en el sentido de las agujas del reloj, al tiempo que el valor máximo del campo permanece constante. Se dice entonces que la onda está polarizada circularmente hacia la derecha (RHCP): **polarización circular dextrógira**.

Si φ=3π/2 entonces $\tan\alpha = \tan(\omega t - \beta z)$ y $\alpha = \omega t - \beta z$ y la onda está polarizada circularmente hacia la izquierda (LHCP): **polarización circular levógira**.

Cuando $E_{10}\neq E_{20}$ y $\varphi \neq 0$ entonces, a medida que transcurre el tiempo (o se consideran diferentes puntos en el espacio) la amplitud máxima del campo varía desde $\sqrt{2}E_{10}[1-\cos\varphi]$ hasta $\sqrt{2}E_{10}[1+\cos\varphi]$. La orientación también varía según (1.96) y la figura descrita por el extremo del vector E en el plano transversal es una elipse. Se dice entonces que la onda está polarizada en forma elíptica (hacia la derecha o la izquierda, según corresponda).

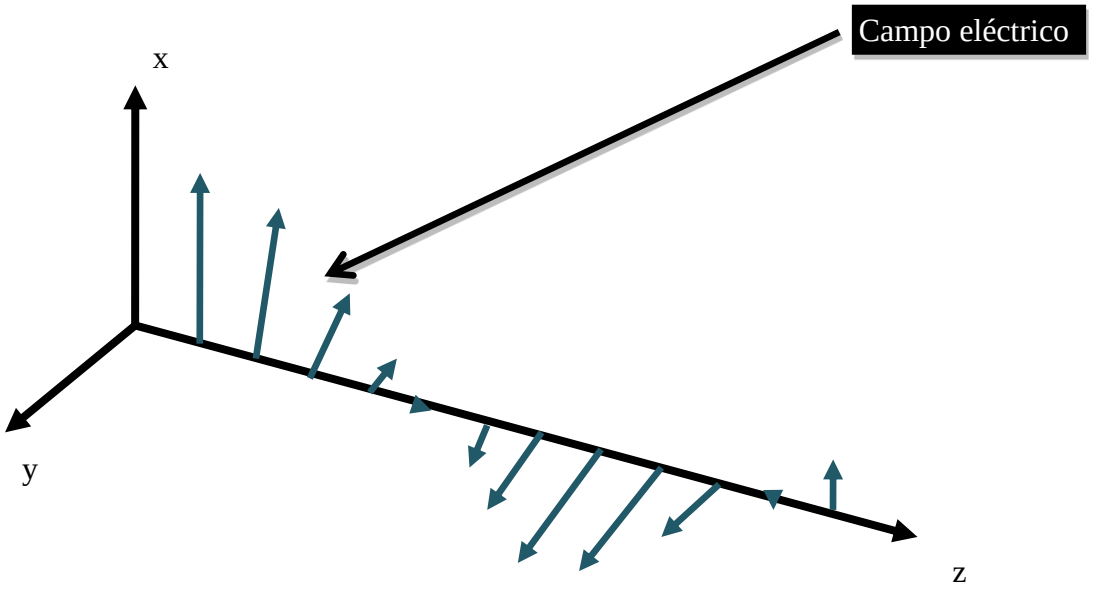


Figura 5. Onda con polarización elíptica

El eje mayor de esta elipse está inclinado a 45º (o 135º), cuando $E_{10}=E_{20}$. La inclinación será diferente para otros valores. Para hallar la ecuación de la elipse se rescribirán las expresiones de manera de eliminar la dependencia temporal. De las ecuaciones (1.89) y (1.90) se tiene que las componentes de *E*, obtenidas de la multiplicación por los cosenos directores son:

$$E_x = E\ t_x = \sqrt{2}E_{10}\cos(\omega t - \beta z)$$

$$E_y = E\ t_y = \sqrt{2}E_{20}\cos(\omega t + \varphi - \beta z) = \sqrt{2}E_{20}\cos((\omega t - \beta z)\cos(\varphi) - \sin(\omega t - \beta z)\sin(\varphi))$$

Si se despeja el valor del coseno en la primera ecuación y se sustituye en la segunda, se puede obtener una ecuación que es independiente del tiempo:

$$E_y = \sqrt{2}E_{20}\left[\left(\frac{E_x}{\sqrt{2}E_{10}}\right)\cos\varphi - \left(1-\left(\frac{E_x}{\sqrt{2}E_{10}}\right)^2\right)^{1/2}\sin\varphi\right]$$

Reordenando los términos se tiene,

$$\left(1-\left(\frac{E_x}{\sqrt{2}E_{10}}\right)^2\right)^{1/2}\sin\varphi = \left[\left(\frac{E_x}{\sqrt{2}E_{10}}\right)\cos\varphi - \left(\frac{E_y}{\sqrt{2}E_{20}}\right)\right]$$

$$\left(1-\left(\frac{E_x}{\sqrt{2}E_{10}}\right)^2\right)\sin^2\varphi = \left(\frac{E_x}{\sqrt{2}E_{10}}\right)^2\cos^2\varphi + \left(\frac{E_y}{\sqrt{2}E_{20}}\right)^2 - \left(\frac{E_y}{E_{20}}\right)\left(\frac{E_x}{E_{10}}\right)\cos\varphi$$

y, finalmente,

$$\sin^2\varphi = \left(\frac{E_x}{\sqrt{2}E_{10}}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{\sqrt{2}E_{20}}\right)^2 - \left(\frac{E_y}{E_{20}}\right)\left(\frac{E_x}{E_{10}}\right)\cos\varphi \qquad (1.93)$$

que es la ecuación de una elipse.

1-11. Representación genérica de ondas planas

En los casos anteriores se ha considerado para simplificar los cálculos que las ondas planas viajan a lo largo de uno de los ejes de coordenadas, como en el caso de la ecuación (1.38). Se estudiará a continuación una representación para ondas planas que viajen en direcciones cualesquiera del espacio.

En primer lugar se considerará un vector unitario **u** en la dirección de propagación de la onda. Tal vector puede a su vez ser representado en términos de los vectores unitarios en las direcciones de los ejes coordenados a través de sus cosenos directores. Por ejemplo:

$$\vec{u} = u_x\,\hat{\imath} + u_y\,\hat{\jmath} + u_z\,\hat{k} \qquad (1.94)$$

donde u_x=cos α_x es el coseno director en la dirección del eje x, α_x es el ángulo entre **u** y dicho eje, y similarmente para las componentes restantes. Asimismo se considerará un vector unitario $\hat{\mathbf{t}}$ en el plano transversal, en la dirección del campo eléctrico. En términos de los cosenos directores se tiene que

$$\vec{t} = t_x\,\hat{\imath} + t_y\,\hat{\jmath} + t_z\,\hat{k} \qquad (1.95)$$

Y, por tanto

$$\vec{E} = E_x\,\hat{\imath} + E_y\,\hat{\jmath} + E_z\,\hat{k} \qquad (1.96)$$

Con esta escogencia de $\hat{\mathbf{u}}$ y $\hat{\mathbf{t}}$ la ecuación vectorial (1.74) se convierte en una escalar como (1.77), cuyas soluciones generales son similares a la (1.78). Considérese la solución progresiva de esta onda plana

$$\vec{E} = E_0\,e^{-j\beta r}\,\hat{t} \qquad (1.97)$$

donde "r" es la distancia medida en la dirección del eje **u**, y E_0 es la magnitud del campo en el origen. En el sistema de coordenadas rectangular las componentes de $\vec{E}$ se hallan multiplicando la magnitud E_0 por los cosenos directores de **t**. La distancia recorrida "r" es la proyección del radio vector del punto, **r**, en la dirección del vector unitario **u**. Se tienen entonces

$$r = \vec{r} \cdot \hat{u} = \left(x\,\hat{\imath} + y\,\hat{\jmath} + z\,\hat{k}\right) \cdot \left(u_x\,\hat{\imath} + u_y\,\hat{\jmath} + u_z\,\hat{k}\right) = x\,u_x + y\,u_y + z\,u_z$$

El número de onda podría entonces ser expresado como si fuese un vector de componentes (β_x, β_y, β_z), las cuales son obtenidas de multiplicar β por los cosenos directores en la dirección **u**. Así que, finalmente,

$$\beta_x = \beta u_x \;\; ; \;\; \beta_y = \beta u_y \;\; ; \;\; \beta_z = \beta u_z$$

$$\vec{E} = E_0\,t_x\,e^{-j(\beta_x x+\beta_y y+\beta_z z)}\,\hat{\imath} + E_0\,t_y\,e^{-j(\beta_x x+\beta_y y+\beta_z z)}\,\hat{\jmath} + E_0\,t_z\,e^{-j(\beta_x x+\beta_y y+\beta_z z)}\,\hat{k}$$

Adicionalmente se tiene que $\beta_x^2 + \beta_y^2 + \beta_z^2 = \beta^2 = \omega^2\mu\varepsilon$.

Cualquier operación de derivación implicará el cálculo de la derivada del término exponencial. Vamos a calcular el gradiente:

$$\nabla\left(e^{-j\,\beta\vec{r}.\hat{u}}\right) = \nabla\left(e^{-j\beta(x\,u_x+y\,u_y+z\,u_z)}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial \mathrm{x}}\left(e^{-j\beta(x\,u_x+y\,u_y+z\,u_z)}\right)\hat{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\left(e^{-j\beta(x\,u_x+y\,u_y+z\,u_z)}\right)\hat{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\left(e^{-j\beta(x\,u_x+y\,u_y+z\,u_z)}\right)\hat{k}$$

$$= (-j\,\beta u_x)\left(e^{-j\beta(x\,u_x+y\,u_y+z\,u_z)}\right)\hat{\imath} + (-j\,\beta u_y)\left(e^{-j\beta(x\,u_x+y\,u_y+z\,u_z)}\right)\hat{\jmath}$$

$$+ (-j\,\beta u_z)\left(e^{-j\beta(x\,u_x+y\,u_y+z\,u_z)}\right)\hat{k}$$

$$=(-j\,\beta u_x)\hat{\imath}\left(e^{-j\beta(x\,u_x+y\,u_y+z\,u_z)}\right) + \left(-j\,\beta u_y\right)\hat{\jmath}\left(e^{-j\beta(x\,u_x+y\,u_y+z\,u_z)}\right) +$$

$$(-j\,\beta u_z)\hat{k}\left(e^{-j\beta(x\,u_x+y\,u_y+z\,u_z)}\right)$$

$$=\{(-j\,\beta u_x)\hat{\imath} + \left(-j\,\beta u_y\right)\hat{\jmath} + (-j\,\beta u_z)\hat{k}\}\left(e^{-j\beta(x\,u_x+y\,u_y+z\,u_z)}\right)$$

$$= (-j\,\beta\hat{u})e^{-j\,\beta\vec{r}.\hat{u}}$$

$$\nabla\left(e^{-j\,\vec{r}.\vec{\beta}}\right) = \left(e^{-j\,\vec{r}.\vec{\beta}}\right)(-j\vec{\beta}\,)$$

Por tanto, tomar el gradiente de la exponencial se reduce a una multiplicación por $(-j\,\vec{\beta})$

1-11.1 Radioenlaces.

La ingeniería de telecomunicaciones utiliza ondas electromagnéticas para transportar información de un punto a otro del espacio. Se denomina "Radioenlace" a la estructura constituida por un terminal que emite ondas electromagnéticas que transportan información (el "transmisor"), otro terminal encargado de recoger dichas ondas para recuperar la información (el "receptor"), y el medio de transmisión que se haya entre dichos terminales. En la mayoría de las situaciones es posible considerar a estas ondas como esféricas TEM e incluso, si se desprecia

la curvatura del frente de ondas se les puede considerar como localmente planas. Sin embargo, cuando el medio de propagación no es homogéneo como es el caso de la atmósfera terrestre, donde además está presente la superficie de la misma, las soluciones suelen ser mucho más complicadas que la simple onda esférica en el espacio libre. Desde el punto de vista matemático el problema se reduce a solucionar una ecuación diferencial (la ecuación de ondas) con condiciones de frontera, lo cual puede arrojar un conjunto de soluciones (eigenfunctions), cada una caracterizada por un número (eigenvalue); el conjunto de los puntos del espacio que pertenecen a una de estas soluciones es lo que se denomina rayo (en la óptica geométrica). Tales rayos no son necesariamente rectos y un mismo punto del espacio puede ser atravesado por diferentes rayos debido al principio de superposición. Si se utiliza un enfoque de ondas planas (o localmente planas) es posible considerar diversas situaciones que se pueden presentar cuando estos rayos se desplazan en la atmósfera terrestre. A frecuencias muy altas los rayos que se transmiten en el radioenlace se hallan muy juntos entre sí y presentan un comportamiento similar al de las ondas de luz. La mayor parte de la energía se halla confinada a la baja atmósfera y se propagan en una trayectoria casi rectilínea. A esta situación se le denomina “Onda Espacial” y el efecto de la Tierra se reduce a reflexiones en el terreno o a difracción alrededor de obstáculos. A frecuencias muy bajas (por debajo de 2 MHz), efecto del terreno es mucho mayor. La conductividad finita del terreno provoca la circulación de corrientes inducidas que interaccionan con la onda que viaja en el aire. Debido a que la señal que viaja por dentro de la tierra conductora viaja a una velocidad inferior a la que viaja por el aire, el frente de onda se inclina y se produce un efecto de onda guiada. A esta condición se le conoce como “Onda Superficial”.

Una tercera situación ocurre en el intervalo 2 a 30 MHz donde la señal puede viajar hasta la alta atmósfera (la ionósfera) donde es refractada y retornada a la tierra. De acuerdo a la altura a la cual ocurra este fenómeno es posible alcanzar grandes distancias que de otra manera sería imposible de alcanzar debido al efecto de sombra que produce la curvatura de la tierra. Este mecanismo de propagación se le denomina “Onda Ionosférica” y de hecho era el único disponible para los enlaces internacionales antes del advenimiento de los satélites artificiales de comunicaciones.

1-11.2Propagación en medio no homogéneos.

Para verificar la dirección de propagación se estudiará el comportamiento del término de divergencia $\nabla \cdot \vec{E}$

Si se considera la propagación en un medio libre de cargas se tiene que $\nabla \cdot \vec{D} = 0$. Ahora bien,

$$\nabla \cdot \vec{D} = \nabla \cdot \left(\epsilon \vec{E}\right) = \nabla\epsilon \cdot \vec{E} + \epsilon\left(\nabla \cdot \vec{E}\right) = 0$$

Si el medio es homogéneo e isotrópico, el primer término es cero y en consecuencia también debe serlo el segundo. Para una onda de la forma (1.97) la divergencia vale,

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{E} &= \nabla \cdot \left(E_0 e^{-jkr}\, \hat{t}\right) \\ &= \nabla\left(E_0 e^{-jkr}\right) \cdot \hat{t} \\ &= E_0\, \nabla\left(e^{-jkr}\right) \cdot \hat{t} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{E} &= E_0\left(e^{-jkr}\right)(-jk\,\hat{u}) \cdot \hat{t} = \\ &= E_0\left(e^{-jkr}\,\hat{t}\right) \cdot\ (-jk\,\hat{u}) = 0 \end{aligned}$$

En consecuencia, la dirección de propagación **u** es perpendicular al vector intensidad de campo eléctrico. Esto parece un resultado obvio para el caso de una onda TEM que se propaga en el espacio libre. Sin embargo, cuando el medio no es homogéneo entonces $\nabla \cdot \vec{E} = -\frac{\nabla\epsilon}{\epsilon} \cdot \vec{E}$, por lo que ya no es válido asumir la condición de perpendicularidad. La ecuación queda,

$$\left(E_0\, e^{-j\,k\,r}\,\hat{t}\right) \cdot\ (-j\,k\,\hat{u}) = \vec{E} \cdot\ (-j\,k\,\hat{u}) =$$

$$= -\frac{\nabla\epsilon}{\epsilon} \cdot \vec{E}$$

$$\vec{E} \cdot \hat{u} = \frac{\nabla\epsilon}{jk\epsilon} \cdot \vec{E} = \frac{\nabla\epsilon}{j\omega\sqrt{\mu\epsilon}\,\epsilon} \cdot \vec{E}$$

por lo que la proyección de $\vec{E}$ sobre la dirección de propagación es proporcional a la proyección del mismo vector sobre el vector unitario en la dirección de máxima variación de ϵ.

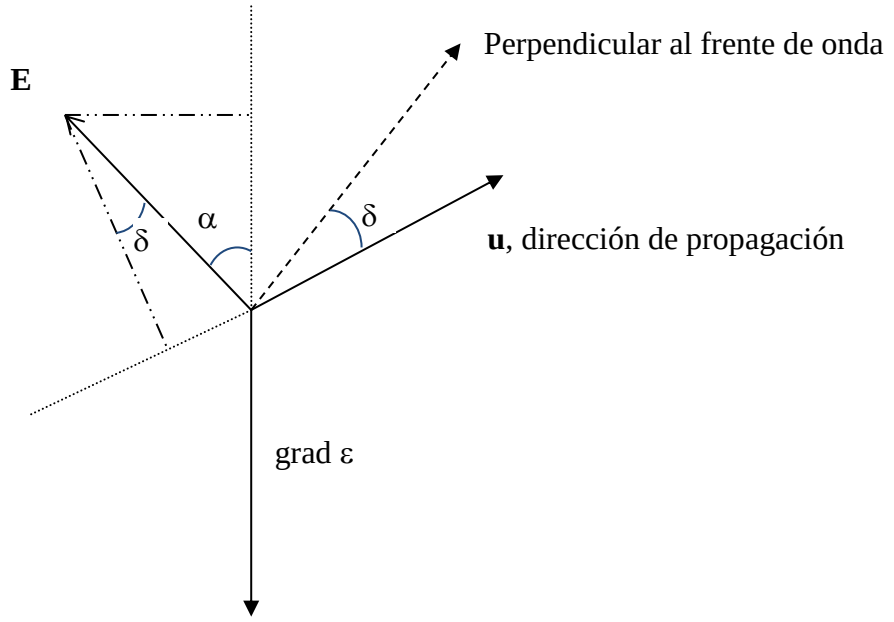


Figura 6. Propagación en un medio inhomogeneo

En función de los ángulos mostrados en el dibujo se tienen entonces que:

$$\left|\vec{E}\right| \sin\delta = \frac{|\nabla\epsilon|}{k\epsilon} \left|\vec{E}\right| \cos\alpha$$

Por lo que es fácil ver que el ángulo de desviación δ se obtiene de:

$$\sin\delta = \frac{|\nabla\epsilon|}{k\epsilon}\cos\alpha$$

En el caso de la tropósfera terrestre ε varía más rápidamente en la dirección vertical y va disminuyendo con la altura, por lo que $\frac{|\nabla\epsilon|}{\epsilon}$ es vertical y hacia abajo. Por tanto, una onda que viaja en la atmósfera terrestre no describe una recta sino una línea que se curva hacia abajo.

Esta desviación depende del ángulo α de elevación del rayo. Un rayo lanzado verticalmente hacia arriba no sufre desviación por cuánto α vale 90° y en consecuencia δ vale 0. Por el contrario, un rayo horizontal sufre la mayor desviación ya que el coseno vale 1. Adicionalmente, como k es proporcional a la frecuencia, es fácil ver que los rayos de luz sufren menos desviación que las señales de microondas. Por ejemplo, las frecuencias de microondas están en el orden de 10^9 Hz, en tanto que las ondas de la luz visible están en el orden de 10^{14} Hz. En consecuencia la desviación de los rayos luminosos es cien mil veces menor que la de las microondas

Una onda que viaja en un medio no homogéneo se curva en dirección de los puntos de mayor permitividad (o de mayor índice de refracción).

En el caso de la ionósfera, la situación es parecida ya que se trata de un medio ionizado. Debido a los efectos contrapuestos de la ionización (producida por la luz ultravioleta del sol) y la recombinación de las partículas libres, aparecen distribuciones verticales de densidad iónica que se conocen con el nombre de capas ionosféricas. Para modelar la propagación de las ondas en estos medios ionizados es necesario sustituir ε y μ de la atmósfera neutra por nuevos valores ε_{efc} y μ_{efc} , los cuales son complejos y dependientes de la frecuencia. El resultado neto es que el frente de la onda se mueve más rápidamente en las zonas donde la densidad de iones es mayor. Por tanto la onda se curva en la dirección en que disminuye la densidad iónica. Dependiendo del ángulo de incidencia y de la frecuencia de la onda, la misma puede experimentar una curvatura tal que devuelva al rayo hacia la tierra (llamada erróneamente "reflexión ionosférica"), o puede curvarse hacia arriba y escapar hacia el espacio.

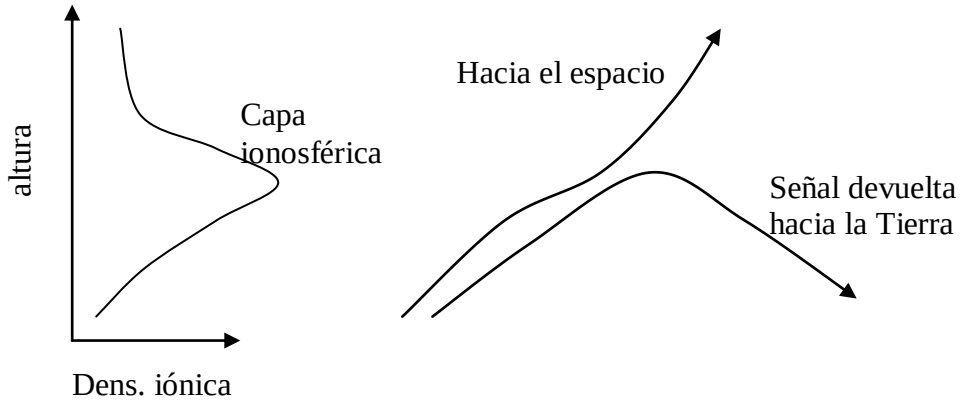


Figura 7. Propagación en la ionósfera

Debido a que el mecanismo de formación de las capas ionosféricas depende de la actividad solar, la altura de las mismas, así como su densidad, cambia constantemente a lo largo del día por lo que el alcance de la reflexión cambia en consecuencia. De igual manera, la máxima frecuencia a la que se puede lograr una "reflexión" cambia con la hora del día, las estaciones del año y el ciclo de actividad de las manchas solares. Esta frecuencia se conoce como MUF (máxima frecuencia utilizable) y existen organismos internacionales que publican cartas de MUF para el adecuado diseño de radioenlaces ionosféricos.

1-12. Propagación en medios con pérdidas y en medios lineales generales

Hasta el momento se ha considerado exclusivamente la propagación de ondas planas en medios sin pérdidas. La solución de las ecuaciones de Maxwell producía ondas progresivas y regresivas, que en el caso de la onda plana infinita no presentaba variaciones en su amplitud r. m. s. a medida que se propagaba. En el caso de las ondas esféricas existe una variación de la amplitud pero la misma es consecuencia de la curvatura finita del frente de ondas y no es debida a pérdidas. Sin embargo, los medios reales presentan pérdidas debidas a la conductividad finita que poseen y por tanto interesa conocer los cambios que experimenta la onda cuando viaja a través de dichos medios. Considérese de nuevo las ecuaciones de Maxwell para ondas sinusoidales en el caso de medios de conductividad finita,

$$\nabla \times \vec{H} = j\omega\epsilon\vec{E} + \sigma\vec{E} \tag{1.98}$$

A continuación se definirá una permitividad efectiva ε_{ef} como sigue,

$$\epsilon_{ef} = \epsilon + \frac{\sigma}{j\omega} = \epsilon' - j\,\epsilon'' \tag{1.99}$$

Donde ε', la parte real, es simplemente ε, y la parte imaginaria es σ/ω. Al sustituir en la expresión de *H* se tiene,

$$\nabla \times \vec{H} = j\omega\epsilon_{ef}\vec{E}$$

Finalmente, al sustituir en la expresión de la ecuación de onda se tiene,

$$\nabla^2\vec{E} - \gamma^2\vec{E} = 0 \tag{1.100}$$

donde ahora,

$$\gamma^2 = (j\omega\mu)(j\omega\varepsilon_{ef}) = j\omega\mu\; j\omega(\varepsilon' - j\varepsilon'') = -\omega^2\mu\varepsilon' + j\omega^2\mu\varepsilon'' = -\omega^2\mu\varepsilon + j\omega\mu\sigma \tag{1.101}$$

Por tanto,

$$\gamma = \alpha + j\beta \tag{1.102}$$

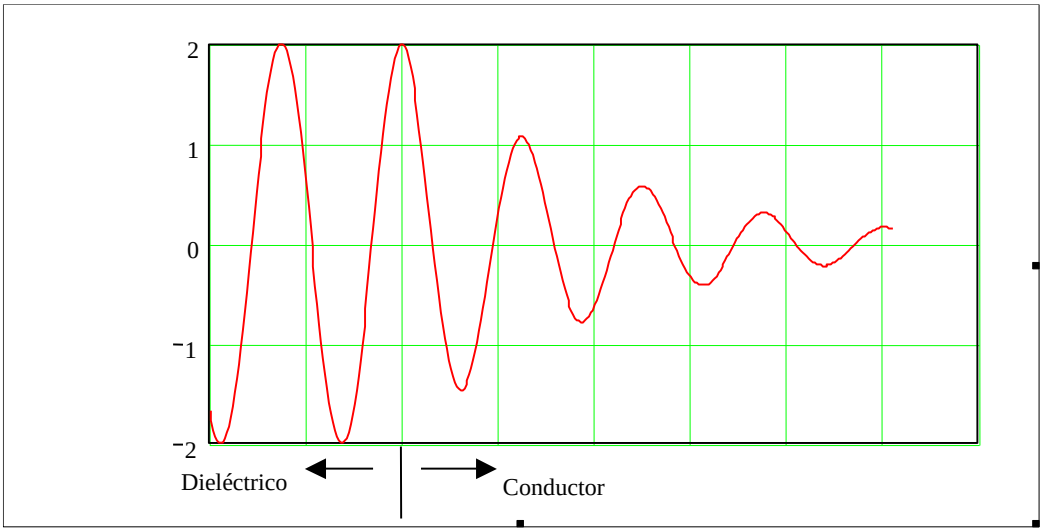
y las soluciones a la ecuación son de la forma

$$e^{-\gamma z} \qquad y \qquad e^{+\gamma z} \tag{1.103}$$

Para ondas planas que se desplazan a lo largo del eje z. Al expandir γ se obtiene, para la solución progresiva,

$$e^{-\alpha z - j\beta z} \tag{1.104}$$

Es decir, que en el sentido de propagación la onda no sólo se atrasa sino que también su amplitud disminuye exponencialmente.



La cantidad γ recibe el nombre de constante de propagación. Su parte real, α, es la constante de atenuación y β es la constante de fase. La **longitud de onda** será ahora,

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} \tag{1.105}$$

Idénticas conclusiones se obtienen para la onda regresiva, es decir, la onda se atenúa y se atrasa en la dirección de "-z".

En el caso de ondas sinusoidales en medios lineales generales las expresiones (1.16) se pueden escribir como,

$$\vec{D}(x,y,z,t) = \epsilon\, \vec{E}(x,y,z,t) + \epsilon_1 \frac{\partial}{\partial t}\vec{E}(x,y,z,t) + \cdots$$

Por lo que los fasores se pueden representar por

$$\vec{D}(x,y,z) = (\epsilon' - j\,\epsilon'')\,\vec{E}(x,y,z) \tag{1.106}$$

Y, similarmente,

$$\vec{B}(x,y,z) = (\mu' - j\,\mu'')\,\vec{H}(x,y,z) \tag{1.107}$$

Y por tanto, la constante de propagación se obtendrá como,

$$\gamma^2 = j\,\omega(\mu' - j\,\mu'')\,j\,\omega(\epsilon' - j\,\epsilon'') = (\alpha + j\,\beta)^2 \tag{1.108}$$

La magnitud del rotor de *E* es,

$$\left|\nabla \times \vec{E}\right| = \frac{dE}{dz} = -\gamma\, E = -j\,\omega\mu\, H$$

Por lo que,

$$H = \left|\vec{H}\right| = \frac{\gamma}{j\,\omega\,\mu}\left|\vec{E}\right| = \frac{1}{Z_w}\left|\vec{E}\right| = \frac{1}{Z_w}E \tag{1.109}$$

La impedancia de onda, Z_w, no es igual a la impedancia intrínseca η y vale,

$$Z_w = \frac{j\,\omega\,\mu}{\gamma} = \sqrt{\frac{j\,\omega\,(\mu' - j\,\mu'')}{j\,\omega\,(\epsilon - j\,\epsilon'')}} \qquad (1.110)$$

Considérese de nuevo la ecuación (1.101),

$$\gamma^2 = \gamma\,\gamma = (\alpha + j\beta)(\alpha + j\beta) = \alpha^2 - \beta^2 + j(2\alpha\beta)$$

De donde,

$$\alpha^2 - \beta^2 = -\omega^2\mu\varepsilon \quad ; \quad 2\alpha\beta = \omega\mu\sigma$$

$$\beta = \omega\sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}}\left[1 + \left(1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2\right)^{1/2}\right]^{1/2} \qquad (1.111)$$

$$\alpha = \omega\sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}}\left[-1 + \left(1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2\right)^{1/2}\right]^{1/2} \qquad (1.112)$$

Un ejemplo de comportamiento de estas cantidades se muestra en la siguiente gráfica:

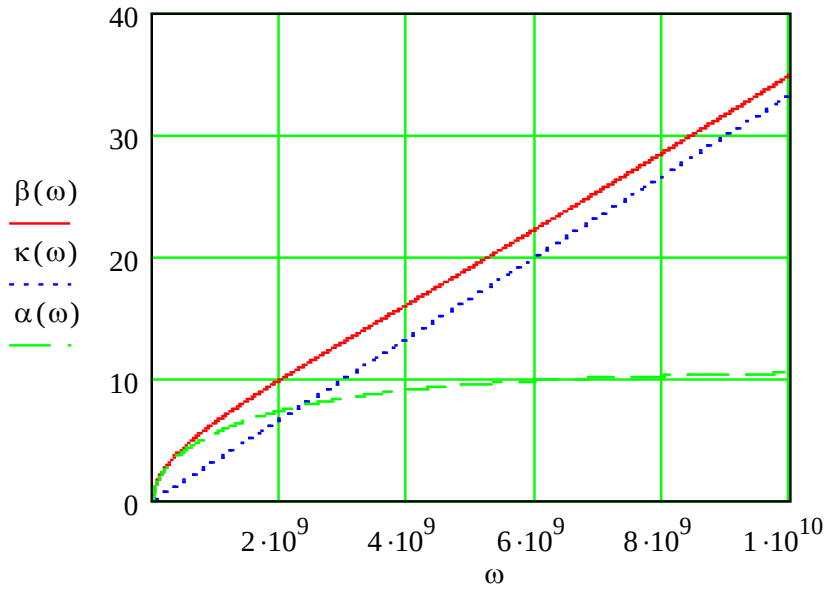


Figura 8 Variación de las constantes de atenuación y de fase con la frecuencia

Para sacar conclusiones acerca de estas fórmulas se considerarán dos casos particulares: un medio de bajas pérdidas y un medio conductor.

En el primer caso se tiene que $\frac{\sigma}{\omega\varepsilon} << 1$. La sustitución produce

$$\beta \cong \omega\sqrt{\mu\varepsilon}\left[1+\frac{1}{8}\left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2\right]$$
$$\alpha \cong \frac{\sigma}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \qquad (1.113)$$

Por otra parte, en el caso de conductores $\frac{\sigma}{\omega\varepsilon} >> 1$, por tanto,

$$\alpha \cong \beta \cong \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}} \qquad (1.114)$$

y por tanto, la onda se atenúa a la misma rata que se atrasa.

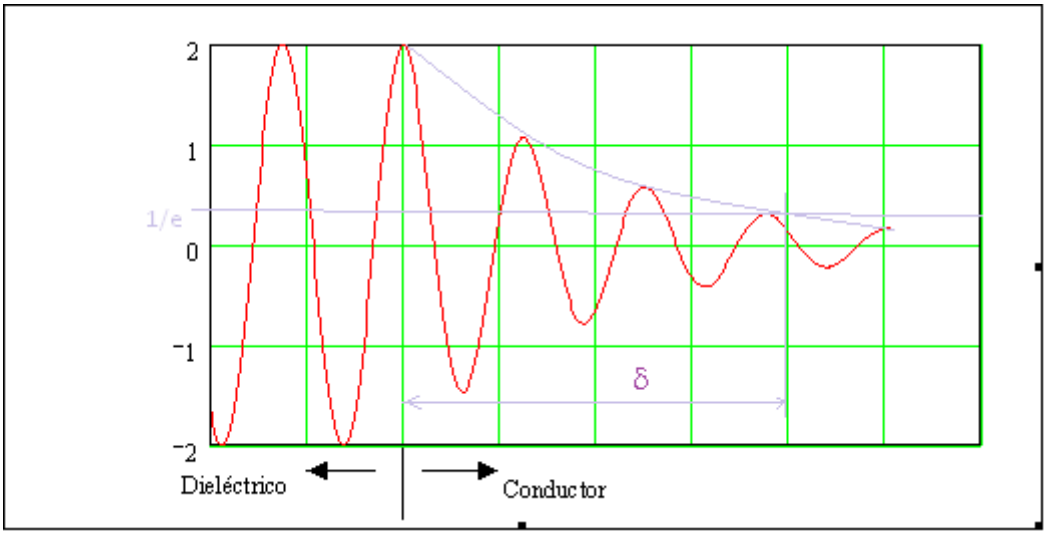


Figura 9. Comportamiento de la onda en un medio con pérdidas

La impedancia de onda en este caso es

$$Z_w = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{j\omega(\varepsilon' - j\varepsilon'')}} \cong \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\omega\varepsilon''}} = \frac{(1+j)}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\omega\mu}{\sigma}} \qquad (1.115)$$

La impedancia de onda es compleja y tiene un ángulo de π/4 radianes. Un concepto muy importante asociado a esta propagación en conductores es el de **distancia pelicular** o **profundidad de penetración**, δ, definido como aquella distancia en la cual la amplitud de los campos se ha reducido a 1/e del valor en la superficie del conductor:

$$e^{-\delta\alpha} = e^{-1}$$
$$\delta = \frac{1}{\alpha} = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}}$$

Como la densidad de corriente es directamente proporcional a la magnitud del campo magnético, se puede concluir que en este caso la corriente circulante se halla concentrada esencialmente en las cercanías de la superficie del conductor, en una cantidad definida por la profundidad de penetración. Para estimar este efecto, y su variación con la frecuencia, en la siguiente tabla se muestran las profundidades de penetración para varios metales y a varias frecuencias.

Profundidad de penetración para varias metales (en cm) $\sigma_{Cu}=5{,}8 \times 10^7$ Siemens/m ; $\sigma_{Ag}= 6{,}17 \times 10^7$ Siemens/m					
	60 Hz	1 kHz	10^4 Hz	10^8 Hz	10^{10} Hz
Cu	0,8532	0,209	0,06609	$6{,}609 \times 10^{-4}$	$6{,}609 \times 10^{-5}$
Ag	0,8212	0,2026	0,06407	$6{,}407 \times 10^{-4}$	$6{,}407 \times 10^{-5}$

De la tabla anterior puede observarse que la penetración de la onda en el metal es despreciable, sobre todo a frecuencias elevadas, y en consecuencia la corriente de conducción inducida por los campos es esencialmente superficial. Esta deducción se hizo asumiendo una onda plana incidente a un conductor de extensión infinita. En el caso de estructuras reales, es necesario rehacer los cálculos para tomar en cuenta las dimensiones finitas del conductor y la geometría del mismo. Sin embargo, los resultados obtenidos en estos casos son esencialmente los mismos mostrados en la tabla. Es por esta misma razón que muchos conductores de alta frecuencia pueden ser huecos, ya que no hay prácticamente corriente circulante por las partes más internas del conductor.

Capítulo 2. Reflexión y Refracción de Ondas Planas

2-1. Comportamiento de las ondas en la interfaz entre medios. Reflexión y Refracción de Ondas Planas.

Hasta este momento se ha estudiado el comportamiento de las ondas planas viajando en el espacio libre. Interesa conocer el comportamiento de estas ondas cuando se pasa de un medio a otro, es decir, cuando se atraviesa la interfaz entre dichos medios. Se considerarán dos casos: incidencia normal e incidencia oblicua a la interfaz. Así mismo se analizarán dos situaciones: cuando el segundo medio es un conductor perfecto, y cuando es un medio lineal simple.

2-1.1 Incidencia de ondas planas sobre un plano perfectamente conductor.

Como se explicó anteriormente un caso sencillo de analizar es el correspondiente al de una onda plana que incide perpendicularmente sobre un plano perfectamente conductor de extensión infinita. El campo en el dieléctrico (el medio 1) consiste de la superposición de dos ondas como se desprende de la solución general de la ecuación de onda y el objetivo de esta sección es hallar una expresión de los campos tomando en cuenta la condición de frontera que impone el conductor. Al igual que en la mayoría de las situaciones estudiadas anteriormente se asumirá un eje de coordenadas rectangulares cuyo eje "z" coincide con la dirección de propagación. El origen de coordenadas se asumirá arbitrariamente sobre el conductor, es decir que la interfaz estará ubicada sobre el plano z=0. La solución general es,

$$\vec{E}(z) = \vec{E}_0^i\, e^{-j\,\beta z} + \vec{E}_0^r\, e^{j\,\beta z}$$
$$\vec{H}(z) = \vec{H}_0^i\, e^{-j\,\beta z} + \vec{H}_0^r\, e^{j\,\beta z} = \hat{k} \times \left(\frac{\vec{E}_0^i\, e^{-j\,\beta z}}{\eta} - \frac{\vec{E}_0^r\, e^{j\,\beta z}}{\eta}\right) \qquad (2.1)$$

Los campos dentro del medio 2, el conductor, son cero. En la frontera z=0 los campos eléctricos tangenciales son iguales, por tanto,

$$\vec{E}_1(0) = 0 = \vec{E}_0^i + \vec{E}_0^r$$
$$\vec{H}_1(0) = \vec{H}_0^i + \vec{H}_0^r = \hat{k} \times \left(\frac{\vec{E}_0^i}{\eta} - \frac{\vec{E}_0^r}{\eta}\right) \qquad (2.2)$$

El campo eléctrico de la onda regresiva en el origen tiene la misma magnitud y dirección de la onda progresiva, pero sentido opuesto. El campo magnético tangencial total en el dieléctrico no es igual a cero porque es compensado por la circulación de una corriente superficial en el conductor. De la ecuación (2.2) se aprecia que $\vec{H}_0^i = \vec{H}_0^r$.

La onda progresiva fue generada por una alguna fuente infinitamente lejana en el espacio, pero la onda regresiva es generada en la interfaz al satisfacer las condiciones de frontera. El mecanismo que da origen a esta onda regresiva (que es la circulación de la corriente superficial) se denomina **reflexión** y en lo sucesivo se dará el nombre de onda incidente a la progresiva y onda reflejada a la regresiva, como indican los superíndices de las expresiones (2.1) y (2.2). Dicho de otra forma, cuando una onda **incide** sobre un conductor perfecto aparece una corriente superficial para satisfacer las condiciones de frontera, y esta corriente superficial es la fuente de la onda **reflejada**.

Al sustituir (2.2) en (2.1) se tiene,

$$\bar{E}(z) = \bar{E}_0^i\left(e^{-j\beta z} - e^{+j\beta z}\right) = \bar{E}_0^i\left(-2j\sin\beta z\right)$$

$$\bar{H}(z) = \bar{H}_0^i\left(e^{-j\beta z} + e^{+j\beta z}\right) = \bar{H}_0^i\left(2\cos\beta z\right) \qquad (2.3)$$

El próximo paso consiste en analizar los resultados obtenidos. La primera interrogante a resolver es:

¿Cuál es la dirección en que se mueve la onda representada por las ecuaciones (2.3)? Para resolver esto es necesario devolver el cambio de variables para obtener los campos instantáneos a partir de los fasores,

$$\vec{E}_1(x,y,z,t) = \Re\left(\sqrt{2}\,\vec{E}_1(x,y,z)e^{j\omega t}\right) = \Re\left(\sqrt{2}\,\overrightarrow{E_0^i}\,(-2j\sin(\beta z))\right)$$

$$\vec{E}_1(x,y,z,t) = 2\sqrt{2}E_0^i\sin(\beta z)\sin\left(\omega t + \varphi_0^i\right)\hat{t}$$

¡¡¡Esto es el producto de una función del tiempo por otra función del espacio y por tanto no tiene la forma descrita en (1.40) !!!

Un razonamiento similar se obtiene al calcular el campo magnético. No existe una relación que ligue al tiempo con el espacio como en las funciones f_1 y f_2 descritas anteriormente, por lo que este resultado no representa una onda en movimiento. Se dice que la onda descrita por la ecuación (2.3) es una **onda estacionaria**.

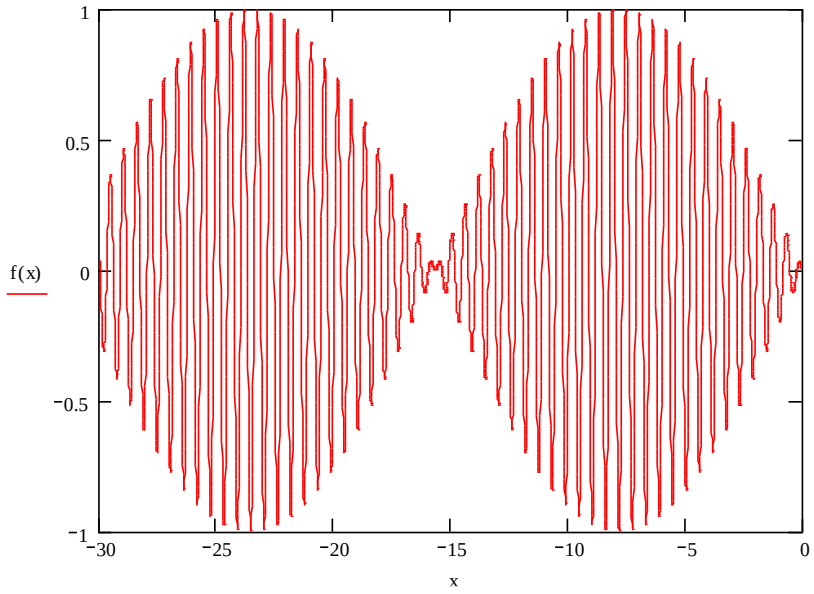


Figura 10. Onda Estacionaria

Este resultado luce desconcertante a primera vista: ¿Como es posible que la combinación de dos ondas en movimiento produzca una onda que no se mueve?

Sin embargo, un análisis un poco más profundo permite resolver esta aparente contradicción: Toda la potencia que lleva la onda incidente es reflejada por el conductor perfecto hacia la fuente y por tanto no hay flujo neto de potencia.

El vector de Poynting complejo de la onda (2.3) es,

$$\vec{S}_1 = \vec{E}_1 \times \vec{H}_1^* = \vec{E}_0^i(-2j\sin\beta z) \times \vec{H}_0^{i*}(2\cos\beta z)^*$$

El término es muy fácil de calcular ya que $\vec{H}_0^i = \hat{k} \times \frac{\vec{E}_0^i}{\eta_1}$ entonces, $\vec{E}_0^i \times \vec{H}_0^i = \hat{k}\ \frac{|\vec{E}_0^i|^2}{\eta_1}$ ya que η_1 es un número real.

Finalmente, se obtiene

$$\vec{S}_1 = \frac{|E_0^i|^2}{\eta_1}\ \hat{k}\ (-2\,j\sin\beta z)(2\cos\beta z) = (-2\,j\sin(2\,\beta z))\frac{|E_0^i|^2}{\eta_1}\hat{k} \qquad (2.4)$$

La densidad de potencia neta transferida es la parte real de $\vec{S}_1$, la cual es cero porque $\vec{S}_1$ es imaginario puro. Sin embargo, su parte imaginaria que es la potencia reactiva no es cero, lo cual indica que existe un almacenamiento local de energía. De igual forma que en el caso de un condensador o una bobina, la energía que se almacena en el campo durante un semiciclo es devuelta en el siguiente semiciclo.

La relación entre el campo eléctrico y el magnético en la onda (2.3) tiene dimensiones de impedancia, pero no es igual a la impedancia intrínseca del medio. Esta **impedancia de onda** es,

$$Z_w(z) = \frac{E_1(z)}{H_1(z)} = \frac{E_0^i(-2j\,sin(\beta z))}{H_0^i\,(2\,cos(\beta z))} = \eta_1(-j\,tan(\beta z)) \qquad (2.5)$$

Esta impedancia es reactiva pura y es además variable con la posición. Si se considera un punto a una distancia "d" de la interfaz se tiene,

z = -d

$$Z_w(d) = j\,\eta_1\,tan(\beta d) = j\,\eta_1\,tan\left(2\pi\frac{d}{\lambda}\right) \qquad (2.6)$$

Es decir que, dependiendo de la distancia a la interfaz, el conductor puede lucir como una bobina, un condensador o una combinación de ambos. Para $0 < d < \lambda/4$, Z_w es inductivo, en tanto que para $\lambda/4 < d < \lambda/2$ el comportamiento es capacitivo.

Cuando βd es pequeño se tiene que,

$$\tanh\left(j\,2\pi\frac{d}{\lambda}\right) = j\tan\left(2\pi\frac{d}{\lambda}\right) \cong j\left(2\pi\frac{d}{\lambda}\right) - j\frac{1}{3}\left(2\pi\frac{d}{\lambda}\right)^3 + \cdots$$

lo cual se puede interpretar como una bobina en serie con un condensador. Cuando βz = 0 la impedancia vale cero, lo cual se puede interpretar como una condición de resonancia cuando las partes reactivas se cancelan entre sí.

Por otra parte en el entorno de π/2 el desarrollo en serie de la cotangente conduce a un resultado que se puede interpretar como un circuito resonante paralelo. Debido a la periodicidad de la tangente los resultados anteriores se pueden extender a los puntos

$d = n\lambda/2 \quad \forall n = 0,1,2,\cdots$ para la resonancias serie y

$d = n\lambda/4 \quad \forall n = 1,3,5,\cdots$ para las resonancias paralelo.

Esta comparación tiene aplicaciones prácticas en frecuencias muy altas para construir elementos reactivos por medio de líneas de transmisión ya que es muy difícil construir condensadores o bobinas que funcionen correctamente a estas frecuencias.

2-1.2 Incidencia oblicua de ondas planas sobre una superficie perfectamente conductora

En la ecuación (2.1) se consideró la solución general del campo en el dieléctrico,

$$\vec{E}_1(z) = \vec{E}_0^{\,i}\,e^{-j\beta z} + \vec{E}_0^{\,r}\,e^{j\beta z} \qquad (2.7)$$

El primer término es la onda incidente. El segundo es la onda reflejada cuya fuente es la corriente superficial inducida en la interfaz. Resulta por tanto conveniente considerar a $\vec{E}_1(z)$ como la superposición de dos ondas progresivas, pero con constantes de propagación diferentes β^i y β^r, cuyas magnitudes son iguales pero difieren en sus cosenos directores. Tal representación tiene la ventaja de poderse extender fácilmente para considerar los casos de incidencia oblicua.

Para el caso de incidencia normal, la ecuación (2.1) se transforma en,

$$\vec{E}_1(\vec{r}) = \vec{E}_0^i\, e^{-j\vec{\beta}^i\cdot\vec{r}} + \vec{E}_0^r\, e^{j\vec{\beta}^r\cdot\vec{r}} \qquad (2.8)$$

donde, $\vec{\beta}^i = \beta\cos(0)\hat{k}$ y $\vec{\beta}^r = \beta\cos(\pi)\hat{k}$

Si ahora se considera que la onda incide en la interfaz con un ángulo cualquiera, entonces el campo total en el dieléctrico vendrá dado por la ecuación (2.8) con los valores apropiados de $\vec{\beta}^i$ y $\vec{\beta}^r$ dados por los cosenos directores.

Para el estudio de la reflexión oblicua se considerarán dos casos particulares:

a) El campo eléctrico es paralelo a la interfaz y

b) El campo magnético es paralelo a la interfaz.

Por simplicidad en los cálculos se asumirá un sistema de coordenadas rectangular, con la interfaz ubicada en el plano z=0.

Con esta escogencia del sistema de coordenadas la condición de frontera se expresará como:

a) Por tratarse de un conductor perfecto el campo eléctrico tangencial debe ser cero. En consecuencia las componentes E_x y E_y serán cero en z=0.
b) La componente tangencial de campo magnético no será cero debido a la existencia de una corriente superficial en la interfaz.

El vector unitario $\mathbf{u}^i$ de la onda incidente está en el plano (x,z) y choca con la interfaz con un ángulo θ_i respecto a la normal a la interfaz,

$$\vec{\beta}^i = \beta\,\hat{u}^i = \beta\left(\sin\theta_i\,\hat{\imath} + \cos\theta_i\,\hat{k}\right) \qquad (2.9)$$

De igual manera la dirección de la onda reflejada viene dada por un vector unitario $\mathbf{u}^r$, que está inclinado un ángulo θ_r respecto a la normal,

$$\vec{\beta}^r = \beta\,\hat{u}^r = \beta\left(\sin\theta_r\,\hat{\imath} - \cos\theta_r\,\hat{k}\right) \qquad (2.10)$$

La ecuación (2.8) se transforma en,

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_0^i\, e^{-j\beta(x\sin\theta_i + z\cos\theta_i)} + \vec{E}_0^r\, e^{-j\beta(x\sin\theta_r - z\cos\theta_r)}$$

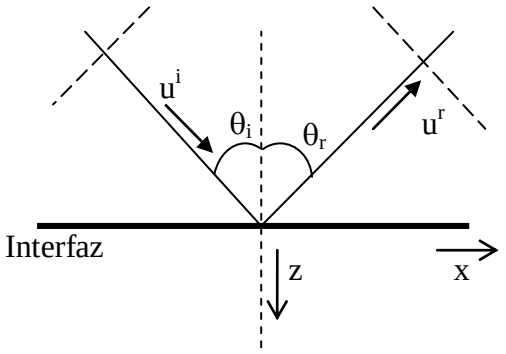


Figura 11. Geometría para el estudio de la incidencia oblicua

a) Campo eléctrico paralelo a la interfaz

Considérese ahora el primer caso. El campo eléctrico incidente tiene dirección **j**. En todos los puntos de la interfaz (z=0) se debe cumplir que el campo eléctrico tangencial debe ser nulo; en particular al hacer x=0 se tiene que $\vec{E}_0^r = -\vec{E}_0^i$. Esto significa que el campo $\vec{E}_1(x,z)$ tendrá también dirección **j**. La substitución produce,

$$\vec{E}_1(x,z) = E_0^i\left(e^{-j\beta(x\sin\theta_i + z\cos\theta_i)} - e^{-j\beta(x\sin\theta_r - z\cos\theta_r)}\right)\hat{j}$$

la cual debe ser cero para cualquier punto de la interfaz, es decir, cuando z=0,

$$0 = \left(e^{-j\beta(x\sin\theta_i)} - e^{-j\beta(x\sin\theta_r)}\right)$$

de donde se concluye que,

$$\sin(\theta_i) = \sin(\theta_r) \qquad \text{y} \qquad \theta_i = \theta_r$$

Finalmente

$$\vec{E}_1(x,z) = E_0^i\, e^{-j\beta(x\sin\theta_i)}\left(e^{-j\beta\cos\theta_i} - e^{+j\beta z\cos\theta_i}\right)\hat{j}$$

$$\vec{E}_1(x,z) = E_0^i\, e^{-j\beta(x\,sin\theta i)}(\text{-2j sin}(\beta\ \text{z cos}\ \theta_i))\ \hat{\mathbf{j}}$$

$$\vec{E}_1(x,z) = E_0^i\, e^{-jx(\beta\,sin\theta_i)}(\text{-2j sin}(\text{z}\ \beta\ \text{cos}\ \theta_i))\ \hat{\mathbf{j}} \qquad (2.11)$$

Este resultado muestra una onda que se propaga a lo largo del eje de las "x" con una constante de fase que es el producto de β por el seno del ángulo de incidencia, y que es estacionaria en "z". Es conveniente expresar β en función de sus componentes a lo largo de estos ejes,

$$\beta\mathbf{u} = \beta_x\mathbf{i} + \beta_z\mathbf{k}$$

donde $\beta_x = \beta\sin(\theta_i)$ y $\beta_z = \beta\cos(\theta_i)$

Entonces,

$$\vec{E}_1(x,z) = E_0^i\, e^{-jx(\beta_x)}(\text{-2j sin}(\text{z}\ \beta_z))\ \hat{\mathbf{j}} \qquad (2.12)$$

Resta ahora hallar el campo magnético. El campo puede hallarse por superposición y reemplazando los resultados. Otra posibilidad es tomar el rotor de (2.12),

$$\nabla \times \vec{E}_1 = -j\,\omega\mu\vec{H}_1$$

de donde,

$$\vec{H}_1 = \frac{1}{-j\,\omega\mu}\nabla \times \left[\vec{E}_0^i\, e^{-j\,\beta_x x}\,(-2j\sin(\beta_z\, z))\right]$$

$$= \frac{1}{-j\,\omega\mu}\left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right)\left[\, e^{-j\,\beta_x x}\,(-2j\sin(\beta_z\, z))\right] \times \vec{E}_0^i$$

$$= \frac{1}{j\,\omega\mu}\vec{E}_0^i \times \left[\left(-j\,\beta_x\, e^{-j\,\beta_x x}\,(-2j\sin(\beta_z\, z))\hat{\imath}\right) + \left(\beta_z\;\, e^{-j\,\beta_x x}(-2\,j\cos\beta_z\, z)\right)\hat{k}\right]$$

$$\vec{H}_1 = -\frac{\beta_x}{\omega\mu}\vec{E}_0^i\, e^{-j\,\beta_x x}(-2j\sin(\beta_z\, z)) \times \hat{\imath} + \frac{\beta_z}{\omega\mu}\vec{E}_0^i\, e^{-j\,\beta_x x}(-2\cos(\beta_z\, z)) \times \hat{k} \quad (2.13)$$

El primer sumando (llamada componente transversal) que es el producto de $\vec{E}_1$ por $\frac{\beta_x}{\omega\mu}$, tiene dirección **k** y es por tanto perpendicular a $\vec{E}_1$ y a la dirección de propagación **i**. Se definirá una **impedancia de onda** (en la dirección **i**) como,

$$Z_H = \frac{\omega\mu}{\beta_x} = \frac{\omega\mu}{\beta\sin(\theta_i)} = \frac{\eta}{\sin\theta_i} \qquad (2.14)$$

El segundo sumando de (2.13) tiene dirección **i** (componente longitudinal) y está desfasada π/2 radianes respecto al primer sumando.

Finalmente,

$$\vec{H}_1(x,z) = -\frac{\beta_x}{\omega\mu}\vec{E}_1(x,z)\times\mathbf{i} - \frac{\beta_z}{j\omega\mu}\vec{E}_0^i\left(2\,j\,e^{-j\beta_x x}\cos\left(\beta_z z\right)\right)\times\mathbf{k} \qquad (2.15)$$

En una onda como la definida por (2.12) y (2.15) sólo el campo eléctrico es perpendicular a la dirección de propagación, pues $\vec{H}$ presenta además una componente longitudinal. Se dice que esta onda representa un modo **TRANSVERSO-ELÉCTRICO (TE)** para diferenciarla de las ondas planas estudiadas anteriormente, las cuales se denominan Transversales Electromagnéticas (TEM).

Utilizando la definición dada en la sección 1.8 se tiene que la velocidad de fase de la onda TE vale,

$$v_f = \frac{\omega}{\beta_x} = \frac{\omega}{\omega\sqrt{\mu\varepsilon}\sin\left(\theta_i\right)} = \frac{v}{\sin\theta_i} \qquad (2.16)$$

La velocidad de fase descrita por (2.16) parece producir un resultado absurdo: ¡¡la velocidad de fase es mayor que la velocidad de la luz en el medio!! Sin embargo, esto no contradice los postulados de Einstein pues la velocidad de fase es sólo una definición geométrica; no representa el desplazamiento de ninguna partícula material ni el del flujo de energía. Debe recordarse que la velocidad de fase fue definida como la velocidad a la que tendría que moverse un observador hipotético para apreciar una fase constante en la onda.

La velocidad de grupo es simplemente la componente de velocidad de la onda plana en la dirección **i**, y vale,

$$v_g = v \sin\theta_i \qquad (2.17)$$

El vector de Poynting, obtenido de multiplicar (2.12) por el conjugado de (2.15), es

$$\vec{S}_1 = \vec{E}_0^i\, e^{-j\,\beta_x\, x}\,(-2j\sin(\beta_z\, z)) \times \left\{-\frac{\beta_x}{\omega\mu}\vec{E}_0^i\, e^{-j\,\beta_x\, x}(-2j\sin(\beta_z\, z)) \times \hat{\imath} + \frac{\beta_z}{\omega\mu}\vec{E}_0^i\, e^{-j\,\beta_x\, x}(-2\cos(\beta_z\, z)) \times \hat{k}\right\}^*$$

$$\vec{S}_1 = \frac{1}{Z_H}|E_0^i|^2\left(4\,sin^2\,(\beta_z z)\right)\hat{\imath} - j\,\frac{\beta_z}{\omega\mu}[|E_0^i|^2(2\sin(2\,\beta_z z))\,]\hat{k} \qquad (2.18)$$

El vector de Poynting tiene por tanto componentes tanto longitudinales como transversales. Un análisis más detallado de la solución obtenida permite observar que la componente longitudinal (**i**) es real, en tanto que la componente transversal es imaginaria. Por tanto sólo existe flujo neto de energía en la dirección de propagación. Como la onda es estacionaria en la dirección transversal **k**, la componente del vector de Poynting en esta dirección es imaginaria pura (Mas adelante se demostrará que si existen pérdidas en la interfaz esta componente tiene además una parte real).

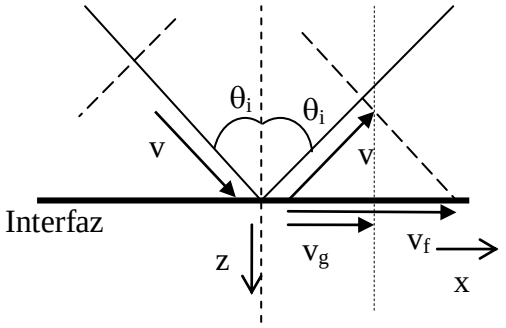


Figura 12. Velocidad de fase y velocidad de grupo

b) Campo magnético paralelo a la interfaz.

El tratamiento de este caso es similar al estudiado anteriormente. El campo magnético tiene dirección **j**, y la onda incide en la interfaz con un ángulo θ_i como en el caso anterior. Las

condiciones de frontera se reducen a hacer que la componente tangencial del campo eléctrico, es decir, E_x, sea igual a cero en z=0. Las demás componentes de campo pueden ser diferentes de cero. El campo eléctrico incidente es,

$$\vec{E}^i(x,z) = \vec{E}_0^i\, e^{-j\,\beta\hat{u}^i\cdot\vec{r}} = E_0^i\, e^{-j\,\beta\hat{u}^i\cdot\vec{r}}\left(\cos\theta_i\,\hat{\imath} - \sin\theta_i\,\hat{k}\right)$$

El campo eléctrico reflejado es,

$$\vec{E}^r(x,z) = \vec{E}_0^r\, e^{-j\,\beta\hat{u}^r\cdot\vec{r}} = E_0^r\, e^{-j\,\beta\hat{u}^r\cdot\vec{r}}\left(-\cos\theta_r\,\hat{\imath} - \sin\theta_r\,\hat{k}\right)$$

y el campo total es la suma de ambos.

$$\vec{E}_1(x,z) = E_{1x}\,\hat{\imath} + E_{1z}\,\hat{k} =$$

$$= E_0^i\, e^{-j\,\beta\hat{u}^i\cdot\vec{r}}\left(\cos\theta_i\,\hat{\imath} - \sin\theta_i\,\hat{k}\right) + E_0^r\, e^{-j\,\beta\hat{u}^r\cdot\vec{r}}\left(-\cos\theta_r\,\hat{\imath} - \sin\theta_r\,\hat{k}\right)$$

Por tanto,

$$E_{1x} = E_0^i\, e^{-j\,\beta\hat{u}^i\cdot\vec{r}}(\cos\theta_i) + E_0^r\, e^{-j\,\beta\hat{u}^r\cdot\vec{r}}(-\cos\theta_r)$$

En cualquier punto de la interfaz, z=0, este campo tangencial debe ser igual a cero, por tanto,

$$0 = E_0^i\, e^{-j\,\beta(\sin\theta_i x)}(\cos\theta_i) + E_0^r\, e^{-j\,\beta(\sin\theta_r x)}(-\cos\theta_r)$$

Para que se cumpla esto para cualquier valor de "x", se debe cumplir que $\theta_i = \theta_r$, al igual que en el caso (a) ya estudiado, y además, $E_0^i = E_0^r$, entonces,

$$E_{1x} = E_0^i\left(\cos\theta_i\right)e^{-j\beta(\sin\theta_i x+\cos\theta_i z)} + E_0^i\left(-\cos\theta_i\right)e^{-j\beta(\sin\theta_i x-\cos\theta_i z)}$$

Al sustituir se obtiene,

$$E_{1x} = E_0^i\left(\cos\theta_i\right)e^{-j\beta(\sin\theta_i x)}\left(e^{-j\beta(\cos\theta_i z)} - e^{j\beta(\cos\theta_i z)}\right)$$

y finalmente,

$$E_{1x} = E_0^i\left(\cos\theta_i\right)e^{-j\beta(\sin\theta_i x)}\left(-2j\sin\left(\beta z\cos\theta_i\right)\right)$$

Si se usan las definiciones anteriores $\beta_x = \beta\sin\left(\theta_i\right)$ y $\beta_z = \beta\cos\left(\theta_i\right)$, se obtiene

$$E_{1x} = E_0^i\left(\cos\theta_i\right)e^{-j\beta_x x}\left(-2j\sin\left(\beta_z z\right)\right) \qquad (2.19)$$

la cual es la componente longitudinal del campo ya que la onda se está desplazando en la dirección **i**. La componente transversal del campo eléctrico es,

$$E_{1z} = E_0^i\left(-\sin\theta_i\right)e^{-j\beta(\sin\theta_i x+\cos\theta_i z)} + E_0^i\left(-\sin\theta_i\right)e^{-j\beta(\sin\theta_i x-\cos\theta_i z)}$$

$$E_{1z} = E_0^i\left(-\sin\theta_i\right)e^{-j\beta_x x}\left[2\cos\left(\beta_z z\right)\right] \qquad (2.20)$$

Esta ecuación muestra que la componente transversal del campo eléctrico tiene una forma equivalente a la ecuación (2.12), es decir la onda se propaga a lo largo del eje "x" con una constante de fase β_x, y es estacionaria a lo largo del eje "z".

De manera similar al caso (a), las componentes longitudinales y transversales del campo eléctrico están desfasadas entre sí $\pi/2$ radianes. Si se aplica el rotor del campo eléctrico se tiene que,

$\nabla \times \vec{E}_1 = -j\omega\mu\vec{H}_1$, por lo que

$$\vec{H}_1 = \frac{1}{-j\omega\mu}\nabla \times \left[E_{1x}\hat{\imath} + E_{1z}\hat{k}\right] = \frac{1}{-j\omega\mu}\left[\nabla E_{1x} \times \hat{\imath} + \nabla E_{1z} \times \hat{k}\right]$$

$$\vec{H}_1 = \frac{1}{-j\omega\mu}\left[\frac{\partial}{\partial z}E_{1x} - \frac{\partial}{\partial x}E_{1z}\right]\hat{\jmath}$$

$$= \frac{1}{-j\omega\mu}\left[E_0^i\, e^{-j\,\beta_x x}(\cos\theta_i)(-2j\,\beta_z \cos\beta_z z) - (-j\beta_x)E_0^i\, e^{-j\,\beta_x x}(-\sin\theta_i)(2\cos(\beta_z z))\right]\hat{\jmath}$$

y, al sustituir por los valores de β_x y β_y y efectuar la suma se obtiene,

$$\vec{H}_1 = \frac{\beta}{\omega\mu}\left[E_0^i\, e^{-j\,\beta_x x}(2\cos(\beta_z z))(cos^2\theta_i + sin^2\theta_i)\right]\hat{\jmath} =$$

$$\vec{H}_1(x,z) = \frac{\beta}{\omega\mu}\left[E_0^i\, e^{-j\,\beta_x x}(2\cos(\beta_z z))\right]\hat{\jmath} \qquad (2.21)$$

El cociente de los campos transversales, es decir (2.20) entre (2.21) es una impedancia,

$$Z_E = \frac{E_{1z}}{H_1} = \frac{\omega\mu}{\beta}\sin(\theta_i) = \eta\sin(\theta_i) \qquad (2.22)$$

El campo definido por las ecuaciones (2.20) y (2.21) sólo tiene componente transversal del campo magnético, en tanto que el campo eléctrico tienen adicionalmente una componente longitudinal. El mismo recibe el nombre de modo **TRANSVERSO-MAGNÉTICO (TM)**.

De manera similar al caso (a), el vector de Poynting tiene una componente real en la dirección de propagación **i**, que es el producto de las componentes transversales de los campos. Adicionalmente tiene una componente transversal que es imaginaria lo cual indica que existe un almacenamiento local de energía.

$$\vec{S}_1 = \frac{1}{Z_E}\left|E_0^i\right|^2\left(4\,cos^2\,(\beta_z z)\right)\hat{\imath} - j\,\frac{\beta_z}{\omega\mu}\left|E_0^i\right|^2(2\sin(2\,\beta_z z))\,\hat{k}$$

Finalmente, y para verificar la validez de los resultados obtenidos se hará θ_i=0 para comprobar si las fórmulas se reducen a aquellas de la incidencia normal.

En el caso de la onda TE de la ecuación (2.12) se tiene,

$$\vec{E}_1(x,z) = E_0^i\, e^{-jx(\beta_x)}(\text{-2j}\,\sin(\text{z}\,\beta_z))\,\hat{\mathbf{j}}$$

$$\vec{H}_1(x,z) = -\frac{\beta_x}{\omega\mu}\vec{E}_0^i\, e^{-j\,\beta_x\, x}(-2j\sin(\beta_z\, z)) \times \hat{\imath} + \frac{\beta_z}{\omega\mu}\vec{E}_0^i\, e^{-j\,\beta_x\, x}(-2\cos(\beta_z\, z)) \times \hat{k}$$

Al considerar la incidencia normal θ_i=0 se tiene β_x=β sin(0)=0 y β_z=β cos(0)= β, por tanto

$$\vec{E}_1(x,z) = E_0^i\ (\text{-2j sin(z }\beta))\ \hat{\mathbf{j}}$$

$$\vec{H}_1(x,z) = -\frac{\beta}{\omega\mu}\vec{E}_0^i(-2\cos(\beta\, z)) \times \hat{k}$$

lo cual es precisamente la ecuación (2.3). Resultados similares se obtienen al sustituir θ_i=0 en (2.20) y (2.21) para la onda TM.

2-1.3 Incidencia normal de una onda plana a un dieléctrico.

En las secciones 2-1.1 y 2-1.2 se ha estudiado el caso de la incidencia de ondas planas sobre un conductor perfecto que produce una reflexión total de la energía. Se estudiará a continuación el caso cuando la onda plana pasa de un dieléctrico a otro, y se demostrará que la energía es sólo parcialmente reflejada. Se estudiará luego el caso cuando existen varias capas dieléctricas y el caso de la incidencia oblicua.

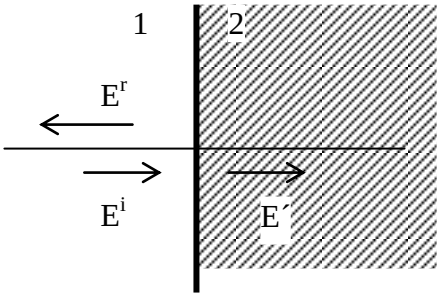


Figura 13. Incidencia normal a un dieléctrico

En el primer caso se utilizará una geometría similar a la empleada en la sección 2-1.1, donde una onda plana incide sobre la interfaz desde el semiplano izquierdo. Se utilizará un sistema de coordenadas rectangular con el origen sobre la interfaz.

El campo total viene dado por la ecuación (2.1)

$$\vec{E}_1(z) = \vec{E}_0^i\, e^{-j\beta_1 z} + \vec{E}_0^r\, e^{j\,\beta_1 z}$$

$$\vec{H}_1(z) = \vec{H}_0^i\, e^{-j\beta_1 z} + \vec{H}_0^r\, e^{j\beta_1 z} = \hat{k} \times \left(\frac{\vec{E}_0^i\, e^{-j\beta_1 z}}{\eta_1} - \frac{\vec{E}_0^r\, e^{j\,\beta_1 z}}{\eta_1}\right) \qquad (2.23)$$

pero ahora la condición de frontera es diferente: La componente tangencial del campo eléctrico debe ser continua a través de la interfaz. Además, como el segundo medio es dieléctrico no hay corrientes superficiales y las componentes tangenciales del campo magnético deben ser continuas. Si el segundo medio es de extensión infinita no existirá onda reflejada en él por lo que,

$$\vec{E}_2(z) = \vec{E}_0' \, e^{-j\beta_2 z}$$
$$\vec{H}_1(z) = \hat{k} \times \left(\frac{\vec{E}_0' \, e^{-j\beta_2 z}}{\eta_2}\right) \qquad (2.24)$$

En la interfaz z=0 , se debe cumplir la condición de frontera por lo que los módulos,

$$E_1(0) = E_0^i + E_0^r = E_2(0) = E_0^{'} \qquad (2.25)$$

$$H_1(0) = \frac{E_0^i}{\eta_1} - \frac{E_0^r}{\eta_1} = H_2(0) = \frac{E_0^{'}}{\eta_2} \qquad (2.26)$$

Este es un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas E_0^r y E_0' . Al sustituir (2.25) en (2.26) se obtiene,

$$\frac{E_0^i}{\eta_1} - \frac{E_0^r}{\eta_1} = \frac{E_0^i}{\eta_2} + \frac{E_0^r}{\eta_2}$$
$$\therefore$$
$$\frac{E_0^i}{\eta_1} - \frac{E_0^i}{\eta_2} = \frac{E_0^r}{\eta_1} + \frac{E_0^r}{\eta_2}$$

de donde,

$$\Gamma_1 = \frac{E_0^r}{E_0^i} = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} \qquad (2.27)$$

donde se ha definido la cantidad compleja Γ como el cociente de los dos fasores E^r_0 y E^i_0. Esta cantidad recibe el nombre de **COEFICIENTE DE REFLEXIÓN**. Así mismo se puede definir un **COEFICIENTE DE TRANSMISIÓN**, T, como,

$$T_1 = \frac{E_0^{'}}{E_0^i} = \frac{E_0^i + E_0^r}{E_0^i} = \frac{2\eta_2}{\eta_2 + \eta_1} \qquad (2.28)$$

Una aplicación práctica de estos conceptos es en ensayos no destructivos: Si se puede medir el coeficiente de reflexión entonces se puede conocer la impedancia intrínseca del medio "2" a partir de la ecuación (2.27),

$$\eta_2 = \frac{1+\Gamma_1}{1-\Gamma_1}\eta_1 \qquad (2.29)$$

En realidad este es sólo un resultado correspondiente a una situación ideal de medios de extensión infinita pero es la base de muchos sistemas de ensayos no destructivos. En secciones subsiguientes se generalizarán estos resultados para aplicarlos a situaciones mucho más reales.

Si se substituye la ecuación (2.27) en la (2.1) se pueden obtener otras conclusiones interesantes. En efecto,

$$\vec{E}_1(z) = \vec{E}_0^i\, e^{-j\beta_1 z} + \vec{E}_0^r\, e^{j\beta_1 z} + \vec{E}_0^r\, e^{-j\beta_1 z} - \vec{E}_0^r\, e^{-j\beta_1 z}$$

$$\vec{E}_1(z) = \left(\vec{E}_0^i + \vec{E}_0^r\right) e^{-j\beta_1 z} + \vec{E}_0^r \left(e^{j\beta_1 z} - e^{j\beta_1 z}\right)$$

Si esta expresión se escribe en términos de los coeficientes de reflexión y de transmisión se tiene,

$$\vec{E}_1(z) = \vec{E}_0^i\, T_1\, e^{-j\beta_1 z} + \vec{E}_0^i\, \Gamma_1 (2j \sin \beta_1 z)$$

es decir, que el campo total en el medio "1" se puede interpretar como la superposición de dos ondas: una de ellas de amplitud $E^i_0\, T_1$ que se propaga normalmente a través de ambos medios, y una onda estacionaria de amplitud E^i_0 que existe sólo en el medio "1".

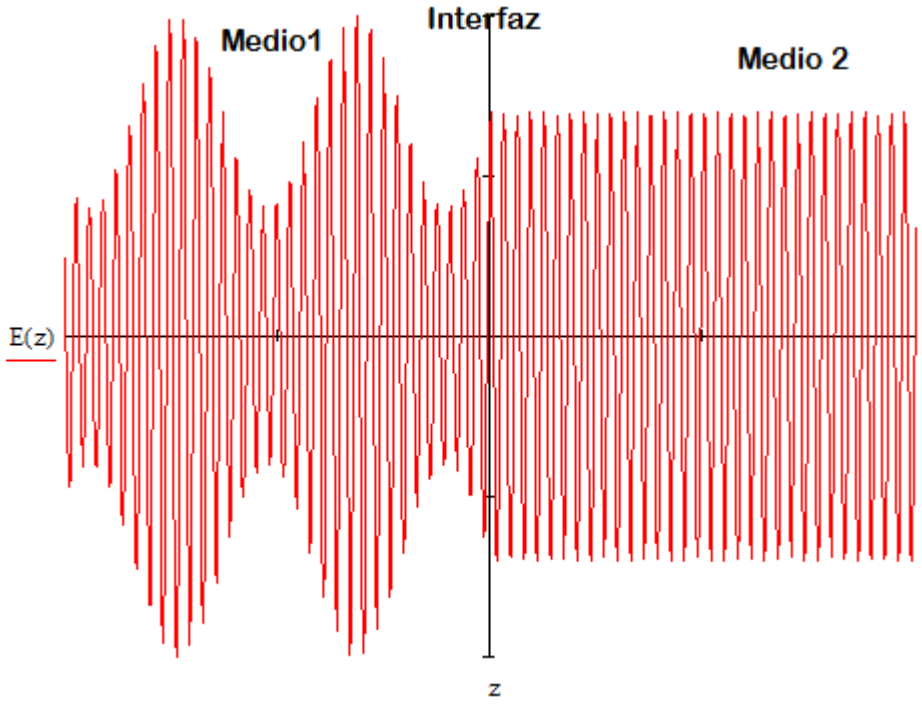


Figura 14. Onda estacionaria y onda transmitida

2-1.4 Incidencia normal sobre medios dieléctricos estratificados.

Un caso frecuente de interés práctico ocurre cuando una onda incide sobre la interfaz de un medio compuesto por porciones de características eléctricas diferentes. Para modelar este caso se

considerará una situación sencilla donde una onda plana infinita proveniente del semiplano izquierdo incide perpendicularmente sobre un medio de extensión transversal infinita, pero de ancho "d", el cual a su vez está un contacto con un tercer medio de extensión infinita hacia el semiplano derecho. El origen de coordenadas se elegirá en la interfaz entre los medios "1" y "2".

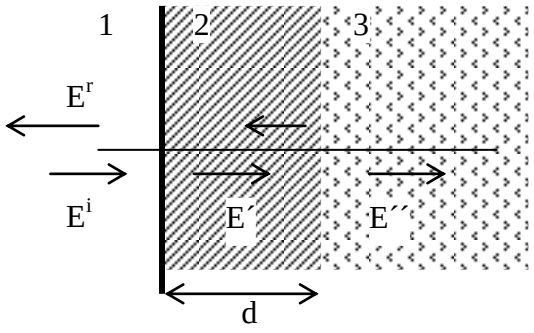


Figura 15. Medios estratificados

Por extensión de la situación presentada en 2-1.3 se tiene que las magnitudes de los campos eléctricos en cada medio son,

$$E_1(z) = E_{10}^{+} e^{-j\beta_1 z} + E_{10}^{-} e^{+j\beta_1 z} \tag{2.30}$$

$$E_2(z) = E_{20}^{+} e^{-j\beta_2 z} + E_{20}^{-} e^{+j\beta_2 z} \tag{2.31}$$

$$E_3(z) = E_{30}^{+} e^{-j\beta_3 z} \tag{2.32}$$

y los campos magnéticos son,

$$H_1(z) = \frac{E_{10}^{+}}{\eta_1} e^{-j\beta_1 z} - \frac{E_{10}^{-}}{\eta_1} e^{+j\beta_1 z} \tag{2.33}$$

$$H_2(z) = \frac{E_{20}^{+}}{\eta_2} e^{-j\beta_2 z} - \frac{E_{20}^{-}}{\eta_2} e^{+j\beta_2 z} \tag{2.34}$$

$$H_3(z) = \frac{E_{30}^{+}}{\eta_3} e^{-j\beta_3 z} \tag{2.35}$$

De la continuidad de las componentes transversales del campo se tiene,

$$E_1(0) = E_{10}^{+} + E_{10}^{-} = E_2(0) = E_{20}^{+} + E_{20}^{-} \tag{2.36}$$

$$E_2(d) = E_{20}^{+} e^{-j\beta_2 d} + E_{20}^{-} e^{+j\beta_2 d} = E_3(d) = E_{30}^{+} e^{-j\beta_3 d} \tag{2.37}$$

$$H_1(0) = \frac{E_{10}^+}{\eta_1} - \frac{E_{10}^-}{\eta_1} = H_2(0) = \frac{E_{20}^+}{\eta_2} - \frac{E_{20}^-}{\eta_2} \tag{2.38}$$

$$H_2(d) = \frac{E_{20}^+}{\eta_2} e^{-j\beta_2 d} - \frac{E_{20}^-}{\eta_2} e^{+j\beta_2 d} = H_3(d) = \frac{E_{30}^+}{\eta_3} e^{-j\beta_3 d} \tag{2.39}$$

De (2.37) y (2.39) se puede hallar un coeficiente de reflexión entre los medios "2" y "3", Γ_2, como sigue: El cociente de (2.37) entre (2.39) es simplemente la impedancia intrínseca del medio "3",

$$\frac{E_{20}^+ e^{-j\beta_2 d} + E_{20}^- e^{j\beta_2 d}}{\left(\frac{E_{20}^+}{\eta_2}\right) e^{-j\beta_2 d} - \left(\frac{E_{20}^-}{\eta_2}\right) e^{j\beta_2 d}} = \eta_3 \tag{2.40}$$

$$\frac{e^{-j\beta_2 d} + \Gamma_{20} e^{j\beta_2 d}}{e^{-j\beta_2 d} - \Gamma_{20} e^{j\beta_2 d}} = \frac{1 + \Gamma_{20} e^{2j\beta_2 d}}{1 - \Gamma_{20} e^{2j\beta_2 d}} = \frac{\eta_3}{\eta_2}$$

donde $\Gamma_{20} = \frac{E_{20}^-}{E_{20}^+}$. Por comparación con (2.29) se puede escribir,

$$\frac{\eta_3}{\eta_2} = \frac{1+\Gamma_2}{1-\Gamma_2} = \tag{2.41}$$

de donde se obtiene inmediatamente,

$$\Gamma_{20} e^{j2\beta_2 d} = \Gamma_2 = \frac{\eta_3 - \eta_2}{\eta_3 + \eta_2} \tag{2.42}$$

Este resultado se puede sustituir en las ecuaciones (2.36) y (2.38) las cuales quedan,

$$E_{10}^+(1+\Gamma_{10}) = E_{20}^+(1+\Gamma_{20})$$

$$\frac{E_{10}^+}{\eta_1}(1-\Gamma_{10}) = \frac{E_{20}^+}{\eta_2}(1-\Gamma_{20})$$

Este es un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas Γ_{10} y E^+_{20}.

Dividiendo las ecuaciones entre sí se tiene,

$$\eta_1 \frac{(1+\Gamma_{10})}{(1-\Gamma_{10})} = \eta_2 \frac{(1+\Gamma_{20})}{(1-\Gamma_{20})}$$

de donde,

$$\Gamma_{10} = \frac{\eta_2(1+\Gamma_{20}) - \eta_1(1-\Gamma_{20})}{\eta_2(1+\Gamma_{20}) + \eta_1(1-\Gamma_{20})} =$$

$$= \frac{\eta_2(\eta_3\cos(\beta_2 d) + j\eta_2\sin(\beta_2 d)) - \eta_1(\eta_2\cos(\beta_2 d) + j\eta_3\sin(\beta_2 d))}{\eta_2(\eta_3\cos(\beta_2 d) + j\eta_2\sin(\beta_2 d)) + \eta_1(\eta_2\cos(\beta_2 d) + j\eta_3\sin(\beta_2 d))} =$$

$$\Gamma_{10} = \frac{\eta_2(\eta_3 + j\eta_2\tan(\beta_2 d)) - \eta_1(\eta_2 + j\eta_3\tan(\beta_2 d))}{\eta_2(\eta_3 + j\eta_2\tan(\beta_2 d)) + \eta_1(\eta_2 + j\eta_3\tan(\beta_2 d))} \qquad (2.43)$$

por tanto, el coeficiente de reflexión observado en el medio "1" contiene no sólo información de las impedancias intrínsecas de los otros dos medios sino también del grosor del medio "2". Este resultado puede ser rápidamente generalizado a medio de múltiples capas. Si se hace variar la frecuencia de excitación es posible establecer un conjunto de ecuaciones similares a (2.39) que pueden ser resueltas numéricamente en un computador para obtener las impedancias intrínsecas y los grosores de los medios. En algunas aplicaciones prácticas se envían trenes de ondas de corta duración (llamados "chirp"), los cuales tienen un gran contenido espectral, a través de la muestra y se observan los retornos en el tiempo. Estas señales se muestrean por medio de un convertidor A/D de alta velocidad y la onda reflejada se separa de la incidente en forma numérica para después proceder al cálculo de los grosores y las impedancias. Esta técnica también ha sido empleada utilizando ultrasonido en lugar de ondas electromagnéticas en aplicaciones que van desde la detección de fallas en estructuras de edificios y prospección petrolera hasta el diagnóstico del feto en el vientre materno.

En el caso de que se trate de una muestra sumergida, el tercer medio es igual al primer, en cuyo caso la expresión (2.43) se simplifica a,

$$\Gamma_{10} = \frac{j(\eta_2^2 - j\eta_1^2)\tan(\beta_2 d)}{2\eta_2\eta_1 + j(\eta_2^2 - j\eta_1^2)\tan(\beta_2 d)} \qquad (2.44)$$

2-1.5 Incidencia normal sobre un medio parcialmente conductor

Los resultados de las secciones anteriores pueden ser rápidamente extendidos al caso de medios parcialmente conductores o medios lineales generales haciendo uso de los conceptos presentados en la sección (1-11). Para ello se substituyen ε y μ por valores efectivos complejos ε_{ef} y μ_{ef}, como se presenta en (1.106) y (1.107), los cuales toman en cuenta a las corrientes de conducción. Ello hace que la constante de propagación γ contenga ahora una parte real, y que la impedancia de onda Z_w difiera de la impedancia intrínseca del medio.

En el caso de la incidencia sobre un sólo medio la fórmula (2.27) se transforma en ,

$$\Gamma_1 = \frac{E_0^r}{E_0^i} = \frac{Z_2 - \eta_1}{Z_2 + \eta_1} \qquad (2.45)$$

Cuando se trata de medios estratificados la expresión (2.43) se modifica cambiando no sólo las impedancias intrínsecas por las impedancias de onda, sino que además los términos de la forma j tan (β_2d) cambiarán a tanh (γ_2d).

2-1.6 Incidencia oblicua sobre un dieléctrico. Refracción

De manera similar al caso presentado en (2-1.2) se considerará una onda que incide oblicuamente a la interfaz entre los medios. Así mismo es de esperarse que existan dos tipos de soluciones dependiendo de la orientación del campo eléctrico respecto a la interfaz: una solución TE y una TM.

a) Considérese en primer lugar el caso de una onda cuyo campo eléctrico es paralelo a la interfaz. El campo total en el dieléctrico "1" es,

$$\vec{E}_1(x,z) = \vec{E}_{10}^i e^{-j\,\beta_1(x\sin\theta_i + z\cos\theta_i)} + \vec{E}_{10}^r e^{-j\,\beta_1(x\sin\theta_r - z\cos\theta_r)}$$

en tanto que en el medio "2" el campo será,

$$\vec{E}_2(x,z) = \vec{E}_{20}^i e^{-j\,\beta_2(x\sin\theta_2 + z\cos\theta_2)}$$

ya que se ha asumido que el mismo es de extensión infinita en la dirección "z" y por tanto no existe reflexión. Los campos eléctricos tienen la dirección del eje “y”, en tanto que los campos magnéticos tienen componentes tanto en “x” como en “z”. La condición de frontera impone que la componente tangencial de los campos eléctricos sea igual a ambos lados de la interfaz, por lo que, en z=0 se debe tener,

$$\vec{E}_1(x,0) = \vec{E}_{10}^i e^{-j\,\beta_1(x\sin\theta_i)} + \vec{E}_{10}^r e^{-j\,\beta_1(x\sin\theta_r)} = \vec{E}_{20}^i e^{-j\,\beta_2(x\sin\theta_2)}$$

para cualquier valor de x.

En particular, para x=0 se tiene,

$$\vec{E}_{10}^i + \vec{E}_{10}^r = \vec{E}_{20}^i$$

$$\vec{E}_1(0,0) = \vec{E}_{10}^i + \vec{E}_{10}^r = \vec{E}_{20}^i$$

y, al sustituir en la ecuación anterior produce

$$\vec{E}_{10}^i e^{-j\,\beta_1(x\sin\theta_i)} + \vec{E}_{10}^r e^{-j\,\beta_1(x\sin\theta_r)} = \left(\vec{E}_{10}^i + \vec{E}_{10}^r\right) e^{-j\,\beta_2(x\sin\theta_2)}$$

Adicionalmente, debido a que el medio es isotrópico es de esperarse que la onda reflejada mantenga la misma polarización de la onda incidente, por lo que también la onda transmitida

tendrá el campo eléctrico en la dirección "y". Entonces, la ecuación anterior será válida también para los módulos de los vectores,

$$E_{10}^{i}\, e^{-j\beta_1(x\sin\theta_i)} + E_{10}^{r}\, e^{-j\beta_1(x\sin\theta_r)} = \left(E_{10}^{i} + E_{10}^{r}\right) e^{-j\beta_2(x\sin\theta_2)}$$

la cual se puede escribir en términos del coeficiente de reflexión (del medio "1") como,

$$e^{-j\beta_1(x\sin\theta_i)} + \Gamma_0\, e^{-j\beta_1(x\sin\theta_r)} = \left(1+\Gamma_0\right) e^{-j\beta_2(x\sin\theta_2)}$$

Para que esta expresión se cumpla para todos los valores de la variables "x", será necesario que,

$$\beta_1(\sin\theta_i) = \beta_1(\sin\theta_r) = \beta_2(\sin\theta_2) \tag{2.46}$$

Por tanto, al igual que en el caso de reflexión por un conductor, el ángulo de incidencia es igual al ángulo de reflexión: $\theta_i=\theta_r=\theta_1$.

Sin embargo, la onda que se transmite al medio "2" se propaga con un ángulo de inclinación diferente,

$$\sin\,\theta_2 = \frac{\beta_1}{\beta_2}\sin\,\theta_1 \tag{2.47}$$

Este fenómeno en el cual la dirección de una onda cambia al pasar de un medio de propagación a otro se denomina **REFRACCIÓN**, y la onda que se propaga en el medio "2" se denomina onda refractada. La combinación de la onda incidente con la reflejada en el medio "1" produce una onda TE. Sin embargo la onda transmitida al medio "2" es exclusivamente TEM.

La velocidad de fase de la onda TEM en cada medio es el cociente ω/β, por tanto,

$$\sin\,\theta_2 = \frac{v_2}{v_1}\sin\,\theta_1 \tag{2.48}$$

la cual es la conocida Ley de Snell de la óptica. Si el medio "1" es el vacío, entonces el cociente c/v_2 es el llamado índice refractivo del medio "2". Utilizando este mismo razonamiento, se puede interpretar la ecuación (2.46) como

$$v_{1x} = \frac{\omega}{\beta_1 \sin\,\theta_1} = \frac{\omega}{\beta_1 \sin\,\theta_r} = \frac{\omega}{\beta_2 \sin\,\theta_2} = v_{2x}$$

es decir, las velocidades de fase (en la dirección "x") son iguales en las tres ondas.

Para hallar las magnitudes de los campos reflejado y refractado se escribirán a continuación las expresiones de los campos magnéticos:

$$\vec{H}_1(x,z) = \vec{H}^i_{10} e^{-j\,\beta_1(x\sin\theta_i + z\cos\theta_i)} + \vec{H}^r_{10} e^{-j\,\beta_1(x\sin\theta_r - z\cos\theta_r)}$$

$$\vec{H}_2(x,z) = \vec{H}^i_{20} e^{-j\,\beta_2(x\sin\theta_2 + z\cos\theta_2)}$$

Las componentes de estos campos son,

$$\vec{H}^i_{10} = \frac{E^i_{10}}{\eta_1}\left(-\cos\theta_1\ \hat{\imath} + \sin\theta_1\ \hat{k}\right)$$

$$\vec{H}^r_{10} = \frac{E^r_{10}}{\eta_1}\left(\cos\theta_1\ \hat{\imath} + \sin\theta_1\ \hat{k}\right)$$

$$\vec{H}^i_{20} = \frac{E^i_{20}}{\eta_2}\left(-\cos\theta_2\ \hat{\imath} + \sin\theta_2\ \hat{k}\right)$$

Por la continuidad de las componentes tangenciales se tiene que,

$$\frac{E^i_{10}}{\eta_1}\left(-\cos\theta_1\right) + \frac{E^r_{10}}{\eta_1}\left(\cos\theta_1\right) = \frac{E^i_{20}}{\eta_2}\left(-\cos\theta_2\right)$$

$$\left[\frac{E^i_{10}}{\eta_1} - \frac{E^r_{10}}{\eta_1}\right]\cos\theta_1 = \frac{E^i_{20}}{\eta_2}\cos\theta_2$$

la cual conjuntamente con,

$$E^i_{10} + E^r_{10} = E^i_{20}$$

constituye un sistema de dos ecuaciones con incógnitas E^r_{10} y E^i_{20}. La solución es,

$$\Gamma_{10} = \frac{E^r_{10}}{E^i_{10}} = \frac{\eta_2\cos\theta_1 - \eta_1\cos\theta_2}{\eta_2\cos\theta_1 + \eta_1\cos\theta_2} \qquad (2.49)$$

$$T_{10} = \frac{E^i_{20}}{E^i_{10}} = \frac{2\eta_2\cos\theta_1}{\eta_2\cos\theta_1 + \eta_1\cos\theta_2} \qquad (2.50)$$

Las ecuaciones (2.49) y (2.50) se reducen a las (2.27) y (2.28) para el caso de incidencia normal como era de esperarse.

El próximo paso consiste en analizar los resultados obtenidos.

En primer lugar, se analizará la ecuación de Snell (2.47).

$$\sin\theta_2 = \frac{\beta_1}{\beta_2}\sin\theta_1$$

Si se asume que la permeabilidad magnética es la misma en ambos medios, entonces la razón de las constantes de fase será igual a la raíz cuadrada de la razón de las permitividades,

$$\sin\theta_2 = \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}}\sin\theta_1$$

Esto quiere decir que si el medio "2" tiene una permitividad mayor que el medio "1" el rayo se acerca a la normal. En caso contrario se aleja. En este último caso existe un límite al ángulo de incidencia más allá del cual no existe transmisión al medio "2". Se dice entonces que ha ocurrido una reflexión total en la interfaz. Este efecto se aprovecha en distintos dispositivos ópticos como en los binoculares para reemplazar a los espejos. También se utiliza en las fibras ópticas de índice escalonado. Este ángulo crítico es,

$$\sin\theta_{crit} = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} \qquad (2.51)$$

b) El segundo caso a estudiar es el correspondiente a un rayo que incide oblicuamente sobre la interfaz y cuyo campo magnético es paralelo a la misma. Siguiendo los mismos pasos anteriores se escriben las expresiones totales a ambos lados de la interfaz y se aplica la condición de continuidad de las componentes tangenciales. El campo eléctrico en el medio "1" es,

$$\vec{E}_1(x,z) = \vec{E}_{10}^{\,i} e^{-j\,\beta_1(x\sin\theta_i + z\cos\theta_i)} + \vec{E}_{10}^{\,r} e^{-j\,\beta_1(x\sin\theta_r - z\cos\theta_r)}$$

en tanto que en el medio "2" el campo será,

$$\vec{E}_2(x,z) = \vec{E}_{20}^{\,i} e^{-j\,\beta_2(x\sin\theta_2 + z\cos\theta_2)}$$

con expresiones similares para los campos magnéticos. En este caso los campos eléctricos están inclinados respecto a la interfaz, pero los campos magnéticos son paralelos a la interfaz,

$$\vec{E}_{10}^{\,i} = E_{10}^{i}\left(\cos\theta_i\ \hat{\imath} - \sin\theta_i\ \hat{k}\right)$$
$$\vec{E}_{10}^{\,r} = E_{10}^{r}\left(-\cos\theta_r\ \hat{\imath} - \sin\theta_r\ \hat{k}\right)$$
$$\vec{E}_{20}^{\,i} = E_{20}^{i}\left(\cos\theta_2\ \hat{\imath} - \sin\theta_2\ \hat{k}\right)$$

y para los campos magnéticos

$$\vec{H}_{10}^{i} = H_{10}^{i}\,\hat{j}$$
$$\vec{H}_{10}^{r} = H_{10}^{r}\,\hat{j}$$
$$\vec{H}_{20}^{i} = H_{20}^{i}\,\hat{j}$$

La ecuación de continuidad de los campos eléctricos en la interfaz es,

$$E_{10}^{i}\cos\theta_i\, e^{-j\beta_1 x\sin\theta_i} - E_{10}^{r}\cos\theta_r\, e^{-j\beta_1 x\sin\theta_r} = E_{20}^{i}\cos\theta_2\, e^{-j\beta_2 x\sin\theta_2}$$

Al igualar las constantes de fase en la dirección "x" se obtiene de nuevo la condición (2.46), es decir, el ángulo de incidencia es igual al de reflexión, y la razón de los ángulos de incidencia y refracción es inversa de la razón de las β's.

Adicionalmente se tiene que $E_{20}^{i}\cos\theta_2 = \left(E_{10}^{i} - E_{10}^{r}\right)\cos\theta_i$

Al igualar los campos magnéticos tangenciales se obtiene

$$H_{20}^{i} = H_{10}^{i} + H_{10}^{r}$$

lo cual, al expresarlo en términos de las impedancias intrínsecas produce,

$$\frac{E_{20}^{i}}{\eta_2} = \left[\frac{E_{10}^{i}}{\eta_1} + \frac{E_{10}^{r}}{\eta_1}\right]$$

Al resolver el sistema de ecuaciones se obtiene,

$$\Gamma_{10} = \frac{E_{10}^{r}}{E_{10}^{i}} = \frac{\eta_1\cos\theta_1 - \eta_2\cos\theta_2}{\eta_1\cos\theta_1 + \eta_2\cos\theta_2} \qquad (2.52)$$

$$T_{10} = \frac{E_{20}^{i}}{E_{10}^{i}} = \frac{2\eta_1\cos\theta_1}{\eta_1\cos\theta_1 + \eta_2\cos\theta_2} \qquad (2.53)$$

En el medio "1" la combinación de las ondas incidente y reflejada produce un campo TM, pues el campo magnético sólo tiene componente en la dirección **j**, y es por tanto perpendicular a la dirección de propagación **i**.

Al analizar los resultados obtenidos se obtienen idénticas conclusiones sobre la existencia de un ángulo crítico que produce reflexión total. Sin embargo, la ecuación (2.52) permite prever un resultado interesante que no se presenta en el caso (a) estudiado antes: bajo ciertas condiciones de ángulo de incidencia e impedancias intrínsecas es posible lograr que no exista reflexión.

En estas condiciones se tiene que,

$$\eta_1 \cos\theta_1 = \eta_2 \cos\theta_2$$

El ángulo de incidencia para el cual sucede este efecto se llama ángulo de Brewster. Al aplicar la ley de Snell al miembro de la derecha se obtiene,

$$\eta_1^2 \cos^2\theta_B = \eta_2^2\left(1-\sin^2\theta_2\right) = \eta_2^2\left(1-\left(\frac{\beta_1}{\beta_2}\right)^2 \sin^2\theta_B\right)$$

de donde,

$$\left[\left(\frac{\eta_1}{\eta_2}\right)^2 - \left(\frac{\beta_1}{\beta_2}\right)^2\right]\cos^2\theta_B = 1-\left(\frac{\beta_1}{\beta_2}\right)^2$$

$$\tan^2\theta_B = \sec^2\theta_B - 1 = \frac{\left(\frac{\eta_1}{\eta_2}\right)^2 - 1}{1-\left(\frac{\beta_1}{\beta_2}\right)^2} \qquad (2.54)$$

Normalmente en el caso de dieléctricos la permeabilidad es muy cercana a la del espacio libre y las relaciones anteriores se pueden expresar en términos de las permitividades,

$$\tan^2\theta_B = \sec^2\theta_B - 1 = \frac{\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right) - 1}{1-\left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\right)} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \qquad (2.55)$$

Por lo tanto, cuando la onda incidente está polarizada de manera que el campo magnético sea paralelo a la interfaz y el ángulo de incidencia es igual al ángulo de Brewster entonces no hay reflexión. En caso de que la onda incidente esté polarizada con un ángulo cualquiera, sólo será reflejada la componente que posee el campo eléctrico paralelo a la interfaz y se dice por tanto que la interfaz es polarizante. Este tipo de efecto se aprecia fácilmente en la luz reflejada desde una ventana: si se utiliza un cristal polarizador (llamado comercialmente Polaroid) se puede cancelar totalmente el reflejo del vidrio de la ventana lo cual demuestra que la luz reflejada está polarizada en un solo plano. En el punto 2-1.8, donde se trata la reflexión desde medios parcialmente conductores como el agua de mar, se demostrará también la existencia de este comportamiento diferencial para las diferentes polarizaciones. En el siguiente ejemplo se

muestra el comportamiento de los coeficientes de transmisión y reflexión para un caso particular. Nótese que el coeficiente de transmisión puede asumir valores superiores a 1, pero esto no significa que se esté violando el principio de conservación de la energía. Simplemente, la mayor amplitud del campo eléctrico viene acompañada de una disminución en el campo magnético debido a la impedancia intrínseca del medio "2".

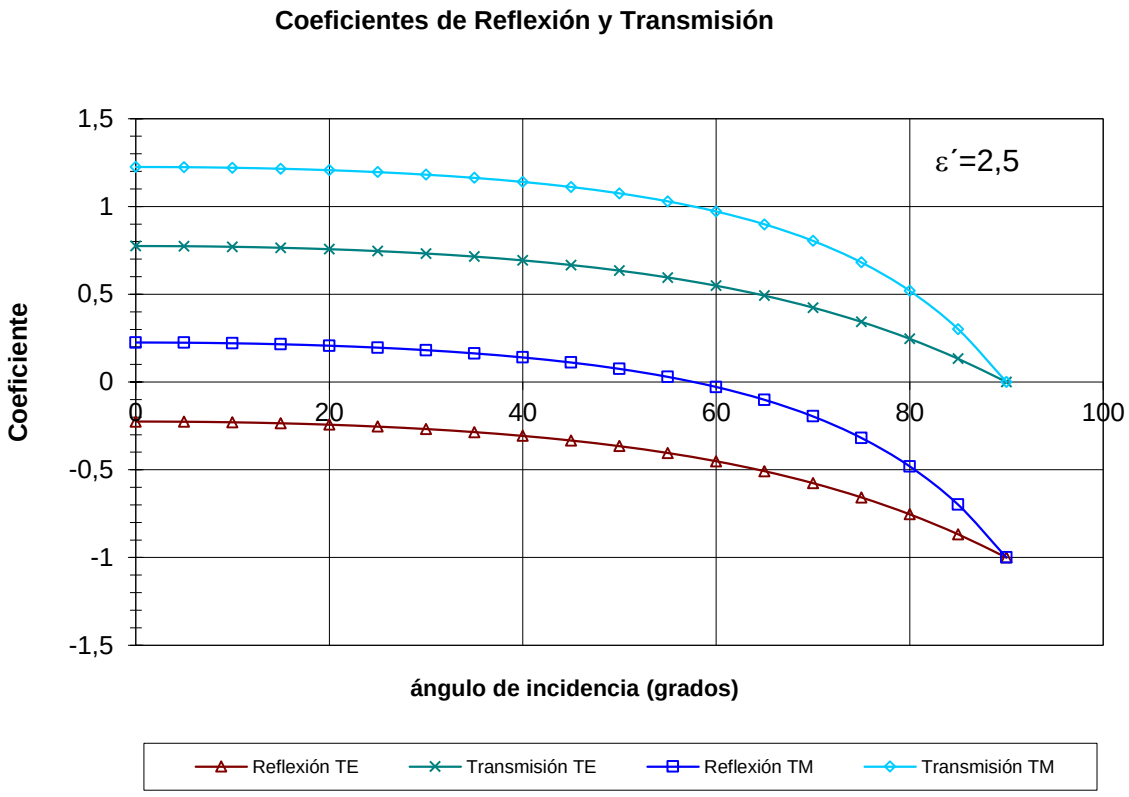


Figura 16. Variación angular de los coeficientes de transmisión y de reflexión

2-1.7 Incidencia oblicua sobre un medio dieléctrico estratificado.

Los conceptos del punto anterior pueden ser extendidos fácilmente al caso de medios estratificados. La Ley de Snell puede ser aplicada a cada una de las interfaces para calcular la nueva trayectoria de los rayos, y las ecuaciones (2.49), (2.50), (2.52) y (2.53) permitirán hallar las magnitudes de los campos transmitidos a través de cada de los medios.

En el caso de medios cuya permitividad varía continua pero suavemente, como la atmósfera, se les puede considerar como constituidos por un gran número de capas. Debido a que la permitividad cambia muy poco entre capa y capa la reflexión será despreciable y sólo habrá refracción. El índice refractivo del aire a nivel mar es aproximadamente 1,000273 en condiciones

normales y decrece casi hasta la unidad a grandes alturas, por lo que este razonamiento se puede utilizar como una buena aproximación para hallar la trayectoria de los rayos en la atmósfera normal. La onda resultante será un rayo TEM que se propaga en una trayectoria curva entre la antena transmisora y la receptora. Sin embargo, en condiciones anómalas de la atmósfera, como en el caso de los ductos, este método geométrico pierde validez pues el campo resultante contiene adicionalmente modos TE y TM.

2-1.8 Incidencia oblicua sobre un medio parcialmente conductor.

Cuando se trata de medios conductores el método a seguir es esencialmente el utilizado en la sección 2-1.6, con la salvedad de que ahora la relación del campo eléctrico al magnético en el medio "2" está dada por la impedancia de onda y no por la impedancia intrínseca. Debido a que las velocidades de fase a lo largo de la interfaz deben ser iguales se cumplirá que el ángulo de incidencia será igual al de reflexión. En el caso del ángulo de refracción se cumplirá también la Ley de Snell pero debe recordarse que β_2 es la parte imaginaria de la constante de propagación,

$$\gamma_2 = \sqrt{j\omega(\varepsilon' - j\varepsilon'')\, j\omega(\mu' - j\mu'')} = \alpha_2 + j\beta_2$$

Las expresiones (2.49) y (2.52) se modifican substituyendo a η_2 por la impedancia de onda Z_{w2}, la cual para buenos conductores viene dada por la expresión (1.114),

$$Z_{w2} = \frac{1+j}{2}\sqrt{\frac{\omega\mu}{\sigma}}$$

$$\Gamma_{10}^{a} = \frac{E_{10}^{r}}{E_{10}^{i}} = \frac{Z_{w2}\cos\theta_1 - \eta_1\cos\theta_2}{Z_{w2}\cos\theta_1 + \eta_1\cos\theta_2} \qquad (2.56)$$

$$\Gamma_{10}^{b} = \frac{E_{10}^{r}}{E_{10}^{i}} = \frac{\eta_1\cos\theta_1 - Z_{w2}\cos\theta_2}{\eta_1\cos\theta_1 + Z_{w2}\cos\theta_2} \qquad (2.57)$$

El coeficiente de reflexión es ahora complejo y presenta un comportamiento diferente para ambas polarizaciones. Sin embargo, en el caso de la ecuación (2.57) no es posible lograr la cancelación completa del numerador ya que Z_{w2} es complejo. Aquel ángulo para el cual se obtiene un mínimo de reflexión se le denomina pseudo-ángulo de Brewster. Es de hacer notar que Z_2 varía con la frecuencia y en consecuencia también los coeficientes de reflexión dados por (2.56) y (2.57). Esta es la justificación de porqué las manchas de aceite sobre agua producen

reflejos de diferentes colores: el coeficiente de reflexión es diferente para cada una de las componentes espectrales de la luz blanca.

Es importante el caso de la propagación de señales de radio sobre el mar. Debido a la gran cantidades de sales disueltas el agua de mar es un excelente conductor y además tiene una ε' cercana a 80 veces la del aire. Esto produce una impedancia de onda extremadamente baja para casi todas las frecuencias de interés en comunicaciones. Al sustituir en las expresiones (2.56) y (2.57) se halla que el coeficiente de reflexión es cercano a 1 para el caso de polarización vertical, y -1 para la polarización horizontal. En el primer caso existe adicionalmente un pseudo-ángulo de Brewster lo cual ayuda a reducir estas reflexiones indeseables.

Capítulo 3. Ondas Guiadas

3.1 Ondas guiadas.

Hasta los momentos se ha estado considerando el caso ideal de la propagación de ondas en medios de extensión infinita. Ocasionalmente se han considerado otros medios, como la atmósfera, pero de extensión suficientemente grande como para no comprometer la validez de las hipótesis iniciales. Sin embargo, existen una gran cantidad de situaciones prácticas en las cuales no es posible considerar a los medios como de extensión infinita. Estas geometrías constituyen estructuras que **guían** a las ondas desde las fuentes hasta cargas; casos prácticos son las líneas de transmisión que "transportan" la energía eléctrica producida en las centrales de generación hasta los centros de consumo, los cables telefónicos que interconectan a los subscriptores del servicio o las fibras ópticas utilizadas en el transporte masivo de datos, voz y video en las redes de comunicaciones de alta capacidad.

El método a seguir consiste en estudiar una estructura de placas paralelas, la cual es de extensión infinita en sólo dos de las direcciones del espacio, para luego convertir los resultados obtenidos a otras estructuras por medio de transformaciones geométricas apropiadas.

3-1.1 Ondas TEM guiadas. Guía de ondas de placas paralelas.

Como ya se mencionó, se considerará el caso de una estructura de placas paralelas entre las cuales se propaga una onda. Una de las láminas se halla sobre el origen de coordenadas y ocupa el plano "xz". La segunda lámina es paralela es ésta y se halla ubicada sobre el plano y=d. El campo eléctrico tiene dirección **j** y la onda se está propagando en la dirección **k**.

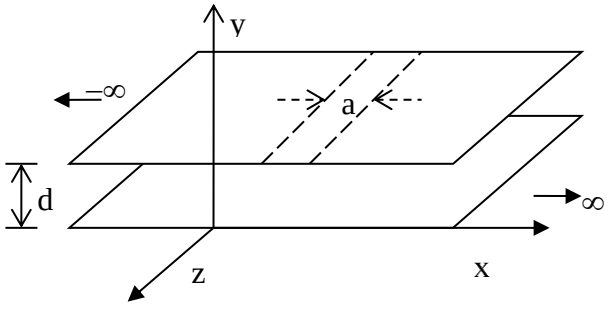


Figura 17. Guía de ondas de placas paralelas

Debido a la simetría de la estructura se asumirá que el campo eléctrico es uniforme entre las

placas y sólo puede variar en la dirección de propagación. Debido a que las placas son perfectamente conductoras los campos dentro de ellas son nulos y la componente normal del campo eléctrico sólo puede ser compensada por la presencia de una carga superficial sobre las placas. Estas cargas variables dan origen a la circulación de una corriente superficial sobre la cara interna de las placas (la cara que mira al espacio entre ellas). Esta corriente superficial compensa a la componente tangencial del campo magnético ya que dentro del conductor el campo vale cero. Como no existen cargas ni corrientes sobre las caras externas, tampoco existirán campos fuera de la estructura. La solución general de los campos será,

$$\vec{E}_1(z) = \vec{E}_0^i\, e^{-j\beta z} + \vec{E}_0^r\, e^{+j\beta z}$$
$$\vec{H}_1(z) = \vec{H}_0^i e^{-j\beta z} + \vec{H}_0^r\, e^{+j\beta z} = \hat{k} \times \left[\frac{\vec{E}_0^i\, e^{-j\beta z}}{\eta_1} - \frac{\vec{E}_0^r\, e^{j\beta z}}{\eta_1}\right] \qquad (2.1)$$

Pero se ha asumido una extensión infinita en la dirección de propagación y por tanto no existirá onda reflejada. Entonces,

$$\vec{E}_1(z) = \vec{E}_0^i\, e^{-j\beta z}$$
$$\vec{H}_1(z) = \vec{H}_0^i e^{-j\beta z} = \hat{k} \times \left[\frac{E_0^i\, e^{-j\beta z}}{\eta_1}\right] \hat{\jmath} = -\frac{E_0^i\, e^{-j\beta z}}{\eta_1}\, \hat{\imath} \qquad (2.2)$$

La relación de las magnitudes de los campos sigue siendo la impedancia intrínseca del medio. El campo eléctrico y el magnético son perpendiculares entre sí y a la dirección de propagación, por tanto la solución obtenida es una onda Transversal Electromagnética (TEM).

Si se integra el campo eléctrico a lo largo de un trayecto entre las láminas se halla la diferencia de potencial,

$$V_d = \int_0^d \vec{E}_1(z) \cdot \hat{\jmath}\, dy = E_0^i\, e^{-j\beta z}\, d \qquad (3.1)$$

Por otra parte, la magnitud de la densidad de corriente superficial es igual a H y es perpendicular al campo magnético. Para la lámina que está en el origen, la normal tiene dirección **j**, por tanto la densidad de corriente en esa lámina vale,

$$\vec{K}_0 = \vec{H}_1 \times \hat{\mathbf{j}} = -\left[\frac{E_0^i}{\eta_1} e^{-j\beta z}\right] \hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{j}} = -\left[\frac{E_0^i}{\eta_1} e^{-j\beta z}\right] \hat{\mathbf{k}} \qquad (3.2)$$

en tanto que para la otra lámina la normal es **-j**, por tanto,

$$\vec{K}_d = -\vec{H}_1 \times \hat{\mathbf{j}} = \left[\frac{E_0^i}{\eta_1} e^{-j\beta z}\right] \hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{j}} = \left[\frac{E_0^i}{\eta_1} e^{-j\beta z}\right] \hat{\mathbf{k}} \qquad (3.3)$$

es decir, las corrientes circulan en direcciones opuestas y tienen la misma magnitud.

Si se considera un trozo de ancho "a" sobre las láminas, en la dirección transversal, la corriente que circula por ese trozo es $I = K_0\, a$. Si ahora se divide la diferencia de potencial entre esta corriente se podrá definir una impedancia para ese trozo de guía,

$$Z_{car} = \frac{V_d}{I} = \frac{E_0^i e^{-j\beta z} d}{\left[\frac{E_0^i}{\eta_1} e^{-j\beta z}\right] a} = \frac{\eta_1 d}{a} \qquad (3.4)$$

La impedancia definida por (3.4) recibe el nombre de impedancia característica de la estructura.

La ecuación (3.1) define una "onda" de voltaje que se propaga a lo largo de la estructura a la misma velocidad del campo eléctrico, en tanto que la (3.2) define la "onda" de corriente. Las comillas se han utilizado para enfatizar que el término onda estrictamente hablando se aplica a los campos y no a las variables circuitales. De la misma manera como (3.1) y (3.2) definen al voltaje incidente y a la corriente incidente, se pueden hallar expresiones similares para las variables reflejadas. En el punto 3-2.2 se continuará el estudio de estas variables circuitales.

Una conclusión importante de estos resultados es que el modo TEM sobre una estructura como ésta requiere de la existencia de un conductor de retorno para las corrientes que circulan por las paredes. Las líneas de campo eléctrico nacen en una pared y mueren en la pared opuesta. Los resultados obtenidos son independientes de la frecuencia de trabajo así que la distribución espacial de los campos es similar a la hallada en el caso estático.

Por otra parte se debe notar que la energía es transportada por el campo en el dieléctrico y no por el conductor. En efecto, el producto $\overline{E} \times \overline{H}^*$ en el dieléctrico tiene la dirección **k** de propagación de la onda y tiene un valor finito; por otra parte, en el conductor el vector de Poynting vale cero porque los campos son nulos dentro de un conductor perfecto. De esta forma la función del conductor no es directamente el transporte de la energía electromagnética sino su guía desde la fuente hasta la carga donde debe consumirse.

De igual manera que en el caso de los campos existirán voltajes y corrientes reflejados cuya interferencia producirá variaciones a lo largo de la estructura, es decir un patrón de ondas estacionarias.

3-1.2 Representación de los campos en componentes transversales y longitudinales.

En secciones anteriores se obtuvieron soluciones a los campos caracterizadas por la presencia (o ausencia) de una componente en la dirección de propagación. Específicamente la solución TE posee una componente del campo magnético en la dirección de propagación; en la solución TM existe una componente longitudinal del campo eléctrico, y en el caso TEM no hay componentes longitudinales. Con la finalidad de extender los resultados obtenidos hasta ahora en modelos de extensión infinita a otros casos de interés práctico se acostumbra separar los campos en componentes transversales y longitudinales y modificar en forma acorde las ecuaciones de campo. Esto tiene por una parte la ventaja de convertir las ecuaciones vectoriales en otras escalares equivalentes, y por la otra ayuda a comprender mejor ciertos fenómenos de propagación como la existencia de frecuencias de corte.

Si el medio es lineal se puede aplicar superposición y el campo total en una región puede considerarse como la suma de soluciones características o "modos". Para que la solución sea completa tales modos deben ortogonales y por tanto linealmente independientes.

Dada una cierta dirección de referencia en el espacio (por ejemplo la dirección de propagación de una onda), el campo total se puede se puede expresar como,

$$\vec{E}(x,y,z) = \sum \vec{E}^{TEM}(x,y,z) + \sum \vec{E}^{TE}(x,y,z) + \sum \vec{E}^{TM}(x,y,z)$$

con una expresión similar para el campo magnético. La primera sumatoria contendrá a lo sumo dos términos (cuando exista onda reflejada), pero el segundo y tercer sumando pueden abarcar varios términos cada uno de ellos identificado por un valor característico o **autovalor**.

Si se escoge la dirección de referencia sobre el eje "z", entonces el plano "xy" será transversal. Si la onda se está desplazando a lo largo de la dirección de referencia entonces todas las variaciones a lo largo de ese eje serán de la forma $e^{-\gamma z}$ y por tanto la derivada espacial $\delta/\delta z$ se reduce a una multiplicación por $-\gamma$. Esto permite a su vez separar el operador espacial ∇ en componentes transversales y longitudinales. Entonces,

$$\vec{E}^{TEM} = \vec{E}_t^{TEM} \quad ; \quad \vec{H}^{TEM} = \vec{H}_t^{TEM} \tag{3.5}$$

$$\vec{E}^{TE} = \vec{E}_t^{TE} \quad ; \quad \vec{H}^{TE} = \vec{H}_t^{TE} + H_z^{TE}\hat{\mathbf{k}} \tag{3.6}$$

$$\vec{E}^{TM} = \vec{E}_t^{TM} + E_z^{TM}\hat{\mathbf{k}} \qquad ; \qquad \vec{H}^{TM} = \vec{H}_t^{TM} \tag{3.7}$$

$$\nabla = \nabla_t - \gamma\hat{\mathbf{k}} \tag{3.8}$$

Al sustituir (3.8) en las ecuaciones de campo se obtendrán expresiones simplificadas. En particular cada una de las componentes de campo contendrá un término de la forma $e^{-\gamma z}$ el cual podrá ser eliminado durante la deducción de la dependencia transversal de los mismos.

3-1.3 Ondas TEM sobre otras geometrías. Transformaciones conformes.

Al sustituir (3.8) en las ecuaciones de campo para un modo TEM se tiene,

$$\left(\nabla_t - \gamma\hat{\mathbf{k}}\right)\times\vec{E}^{TEM} = -j\omega\mu\vec{H}^{TEM} \tag{3.9}$$

$$\left(\nabla_t - \gamma\hat{\mathbf{k}}\right)\times\vec{H}^{TEM} = j\omega\varepsilon\vec{E}^{TEM} + \vec{J} \tag{3.10}$$

$$\left(\nabla_t - \gamma\hat{\mathbf{k}}\right)\cdot\vec{E}^{TEM} = 0 \tag{3.11}$$

$$\left(\nabla_t - \gamma\hat{\mathbf{k}}\right)\cdot\vec{H}^{TEM} = 0 \tag{3.12}$$

donde se ha supuesto un medio lineal, isotrópico y homogéneo y desprovisto de fuentes. Sin embargo, en (3.10) se ha previsto la circulación de una corriente superficial en los conductores de la guía.

Al igualar por separado las componentes transversales y las longitudinales, se tiene de (3.9),

$$\gamma\hat{\mathbf{k}}\times\vec{E}^{TEM} = j\omega\mu\vec{H}^{TEM} \tag{3.13}$$

lo cual permite definir una impedancia de onda Z^{TEM} como,

$$Z^{TEM} = \frac{j\omega\mu}{\gamma} \tag{3.14}$$

$$\vec{H}^{TEM} = \frac{1}{Z^{TEM}}\hat{\mathbf{k}}\times\vec{E}^{TEM} \tag{3.15}$$

La componente longitudinal de (3.10) produce

$$\nabla_t \times \vec{H}^{TEM} = \vec{J} \tag{3.16}$$

por tanto, y como la divergencia de H es cero, será necesario que exista una circulación de corriente para soportar al modo TEM. La componente longitudinal de (3.9) es,

$$\nabla_t \times \vec{E}^{TEM} = 0 \tag{3.17}$$

por tanto E es irrotacional y puede ser expresada como el gradiente de una función potencial,

$$\vec{E}^{TEM} = -\nabla_t \phi \tag{3.18}$$

Al sustituir en (3.11) se tiene,

$$\left(\nabla_t - \gamma \hat{\mathbf{k}}\right) \cdot \vec{E}^{TEM} = \nabla_t \cdot \vec{E}^{TEM} = -\nabla_t \cdot \nabla_t \phi = -\nabla_t^2 \phi \tag{3.19}$$

la cual es la ecuación de Laplace en dos dimensiones. Esto quiere decir que la distribución transversal del potencial es independiente de la frecuencia y depende sólo de la geometría de las condiciones de frontera, por tanto puede solucionarse para el caso electrostático. La ecuación de Laplace puede ser hallada en forma analítica (en algunos casos sencillos) o en forma numérica en un computador. Una vez hallado ϕ se calcula el gradiente y se substituye en (3.18); no se debe olvidar incluir el término $e^{-\gamma z}$ en E^{TEM} y en el campo magnético.

Debido a que en este caso la función potencial depende sólo de la geometría de la estructura es posible utilizar transformaciones conformes para obtener nuevas soluciones a partir de otras conocidas. Por ejemplo, en la sección 3-1.1 se halló la solución a un campo TEM entre dos láminas paralelas; esta geometría puede transformarse fácilmente para hallar soluciones para el campo en una estructura coaxial o en un par de hilos paralelos. Este método también se ha usado para hallar una primera aproximación en el caso de micro-líneas, pues en estas últimas existen además modos in homogéneos.

Algunas propiedades de las transformaciones conformes son que los ángulos se mantienen en la transformación y que los círculos se transforman en otros círculos (las líneas rectas pueden considerarse como círculos de radio infinito). Esto permite considerar la condición de borde impuesta por conductores cilíndricos como una trasformación de la estructura de placas paralelas considerada anteriormente.

Considérese la transformación logarítmica,

$$W = C_1 \ln Z + C_2 \tag{3.20}$$

donde W = u + j v y Z = x + j y son números complejos construidos a partir de las coordenadas en los planos transversales de las estructuras. El logaritmo de un número complejo se halla fácilmente utilizando la forma polar,

$$Z = r e^{j\theta}$$

$$\ln Z = \ln\left(r e^{j\theta}\right) = \ln r + j\theta \tag{3.21}$$

Por tanto,

$$W = C_1\left(\ln r + j\theta\right) + C_2 \tag{3.22}$$

y, si se asumen las constantes como números reales, entonces,

$$\begin{aligned} u &= C_1 \ln r + C_2 \\ v &= C_1 \theta \end{aligned} \tag{3.23}$$

Si ahora se describe la estructura de placas paralelas en el plano transformado (u,v) se encuentra que en el plano (x,y) esto equivale a una estructura coaxial.

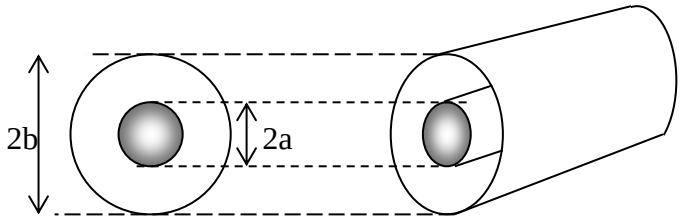


Figura 18. Cable coaxial

En efecto, si se considera a la coordenada "u" como la función potencial ϕ, entonces en el plano (x,y) las equipotenciales corresponden a líneas de radio constante. Consideremos las equipotenciales ϕ=0 y ϕ=V_0 , correspondientes al radio externo e interno del coaxial, para hallar las constantes de la expresión,

$$\begin{aligned} 0 &= C_1 \ln(b) + C_2 \\ V_0 &= c_1 \ln(a) + C_2 \end{aligned}$$

Entonces,

$$C_1 = \frac{V_0}{\ln(a/b)} \qquad y \qquad C_2 = -\frac{V_0}{\ln(a/b)}\ln(b)$$

Por tanto

$$\phi = u = V_0 \frac{\ln(r/b)}{\ln(a/b)} \tag{3.24}$$

y, al tomar el gradiente, se tiene

$$\bar{E}(r,\theta,z) = V_0(z)\frac{1}{r\,\ln(b/a)}\,\hat{\mathbf{r}} \tag{3.25}$$

donde la dependencia $e^{-\gamma z}$ ha sido incluida implícitamente en V_0.

Para hallar la impedancia característica es necesario calcular la corriente, la cual se obtiene de la circulación del campo magnético.

$$\oint \vec{H}^{TEM} \cdot d\vec{l} = \iint \vec{J} \cdot d\vec{s} = I_0$$

y,

$$\vec{H}^{TEM} = \frac{1}{Z^{TEM}}\mathbf{k} \times \vec{E}^{TEM} = \frac{1}{Z^{TEM}}\left(V_0 \frac{1}{\ln(b/a)}\right)\frac{1}{r}\hat{\Theta} \tag{3.26}$$

donde I_0 es la corriente neta abrazada por el contorno de integración. En el espacio entre los conductores ésta será la corriente que circula por el conductor central. Si se integra a lo largo de un trayecto circular, entonces d**l** tiene la dirección del vector unitario Θ, por tanto la integral de circulación se reduce a,

$$I_0 = \int_0^{2\pi} \frac{1}{Z^{TEM}}\left(V_0 \frac{1}{\ln(b/a)}\frac{1}{r}\right) r\,d\theta = \frac{2\pi}{Z^{TEM}} V_0 \frac{1}{\ln(b/a)}$$

y, finalmente, la impedancia característica será,

$$Z_{car} = \frac{V_0}{I_0} = \frac{Z^{TEM}}{2\pi}\ln(b/a) \tag{3.27}$$

Para un coaxial con dieléctrico de aire esto vale,

$$Z_{car} = 60\ln(b/a) \tag{3.28}$$

Así mismo, si no existen pérdidas Z^{TEM} es simplemente la impedancia intrínseca del medio, η,

por lo que,

$$Z_{car} = 60\sqrt{\frac{\mu_r}{\varepsilon_r}}\ln(b/a) \tag{3.29}$$

Un tratamiento similar se puede hacer para el caso de conductores paralelos. La transformación correspondiente es,

$$W = C\ln\left(\frac{Z-a}{Z+a}\right) \tag{3.30}$$

de donde se obtiene,

$$u = \frac{C}{2}\ln\left(\frac{(x-a)^2+y^2}{(x+a)^2+y^2}\right)$$

$$v = C\left(\tan^{-1}\frac{y}{(x-a)} - \tan^{-1}\frac{y}{(x+a)}\right)$$

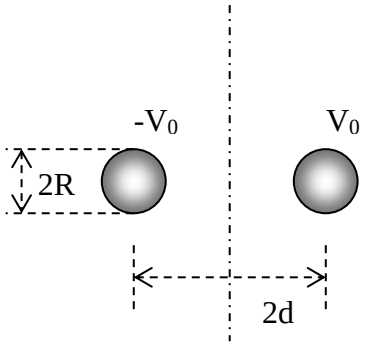


Figura 19 Cable de hilos paralelos

Si se asume que los cilindros están a potenciales $-V_0$ y V_0 respectivamente, entonces la constante C vale,

$$C = \frac{V_0}{2\ln\left(\frac{d}{R}+\sqrt{\left(\frac{d}{R}\right)^2-1}\right)} = \frac{V_0}{2\cosh^{-1}\left(\frac{d}{R}\right)} \tag{3.31}$$

donde "2d" es la separación y "R" el radio de cada conductor. Finalmente,

$$\phi = u = \frac{V_0}{4\cosh^{-1}\left(\frac{d}{R}\right)} \ln\left(\frac{(x-a)^2 + y^2}{(x+a)^2 + y^2}\right) \tag{3.32}$$

donde $a = \sqrt{d^2 - R^2}$

Si se siguen los mismos procedimientos anteriores se halla finalmente que la impedancia característica vale,

$$Z_{car} = \frac{Z^{TEM}}{\pi} \cosh^{-1}\left(\frac{d}{R}\right) \tag{3.33}$$

Los casos presentados hasta ahora demuestran que si se dispone de una transformación conforme apropiada es posible hallar la impedancia característica para una estructura partiendo de los resultados de una estructura conocida. Sin embargo, en muchos casos de interés práctico la situación es justamente la opuesta, es decir, se dispone de la estructura pero no de la transformación. Cuando la estructura puede considerarse como constituida por lados rectos que se intersecan para conformar un polígono, entonces se puede utilizar la transformación de Schwarz para resolver el problema electrostático y a partir de ello hallar la impedancia característica. El método se basa en que cada segmento de línea recta se transformará en un círculo y que los ángulos se mantendrán en la transformación. Finalmente se construye una solución a partir de estos resultados parciales. Los detalles de esta transformación se hallan en el libro de Ramo, Whinnery y Van Duzer, pero es importante notar que la misma puede ser usada no sólo para hallar soluciones cerradas (analíticas) sino que se presta también para hallar soluciones numéricas por medio del computador.

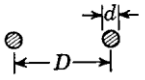
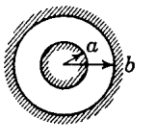
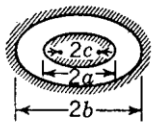
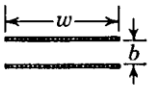
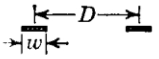
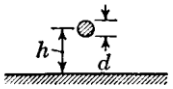
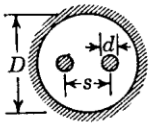
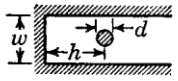
Line	Geometry	Characteristic impedance
Two wire		$Z_0 \approx \frac{\eta}{\pi} \log \frac{2D}{d} \qquad D \gg d$
Coaxial		$Z_0 = \frac{\eta}{2\pi} \log \frac{b}{a}$
Confocal elliptic		$Z_0 = \frac{\eta}{2\pi} \log \frac{b + \sqrt{b^2 - c^2}}{a + \sqrt{a^2 - c^2}}$
Parallel plate		$Z_0 \approx \eta \frac{b}{w} \qquad w \gg b$
Collinear plate		$Z_0 \approx \frac{\eta}{\pi} \log \frac{4D}{w} \qquad D \gg w$
Wire above ground plane		$Z_0 \approx \frac{\eta}{2\pi} \log \frac{4h}{d} \qquad h \gg d$
Shielded pair		$Z_0 \approx \frac{\eta}{\pi} \log \left(\frac{2s}{d} \frac{D^2 - s^2}{D^2 + s^2} \right) \quad D \gg d, \; s \gg d$
Wire in trough		$Z_0 \approx \frac{\eta}{2\pi} \log \left(\frac{4w}{\pi d} \tanh \frac{\pi h}{w} \right) \quad h \gg d, \; w \gg d$

Figura 20. Impedancia característica de diversas líneas TEM

3-2 Aproximación circuital. Líneas de transmisión.

En la sección 3-1 se estableció que si se integraban las variables de campo se obtendrían variables circuitales como la diferencia de potencial (ecuación 3.1) y eventualmente se llegó incluso a definir una impedancia característica como el cociente de estas variables circuitales. Más aún se llegó a establecer que en la presencia de campos progresivos y regresivos también existen las correspondientes variables circuitales; como los campos regresivos son normalmente producidos por la presencia de discontinuidades se acostumbra utilizar los adjetivos "incidente" y "reflejada" para las variables de campo progresivas y regresivas respectivamente.

Estas variables de campo pueden ser detectadas fácilmente por los instrumentos de medición y las discontinuidades son producidas por impedancias concentradas o por impedancias equivalentes producidas por la combinación de diversos circuitos. La función de estas estructuras denominadas "líneas de transmisión" es la de servir de guía a la energía electromagnética desde las fuentes a las cargas correspondientes; en los sistemas de potencia se utilizan para el transporte de la energía producida en las centrales termoeléctricas o hidroeléctricas hasta los centros de consumo. En el caso de comunicaciones se utilizan líneas de transmisión para conectar los transmisores a las antenas, para conectar los abonados telefónicos a las centrales, para formar redes de área local (LANs), etc.

En todos estos casos el mayor interés del ingeniero consiste en el comportamiento longitudinal del sistema el cual está representado en forma más sencilla por las variables circuitales en lugar de las variables de campo.

En la sección 2-1.3 se definió el coeficiente de reflexión como el cociente del campo eléctrico reflejado entre el incidente (ecuación 2.27). Si se integran por separado cada uno de estos campos entre los conductores que forman la línea de transmisión se obtendrán así mismo voltajes: uno reflejado y uno incidente, cuyo cociente podrá ser definido también como un coeficiente de reflexión. En el caso de los campos la reflexión era producida por un cambio en la impedancia intrínseca de los medios (este concepto fue ampliado en 2.45 en función de la impedancia de onda). Cuando se trata de líneas de transmisión la reflexión es producida por un cambio en la impedancia característica cuando se conectan entre sí trozos de línea, o por impedancias concentradas colocadas al final de una línea.

La impedancia característica, así como la variación espacial de las variables circuitales puede ser hallada a partir del modelo diferencial de la línea de transmisión. Esto conduce a resultados equivalentes a los ya conseguidos a partir de las variables de campo. En primer lugar se hallarán las ecuaciones circuitales del modelo diferencial y se compararán con las ecuaciones de campo, para establecer similitudes y diferencias. A continuación se hallarán las soluciones para la tensión y la corriente y se particularizará al caso sinusoidal para hallar la impedancia característica. Finalmente se establecerá una relación entre la impedancia característica y la capacitancia electrostática que permitirá hallar dicha impedancia en muchos casos en los cuales no se cuenta con una transformación conforme apropiada.

Un trozo muy pequeño de línea de transmisión de longitud Δz se puede representar como un

cuadripolo:

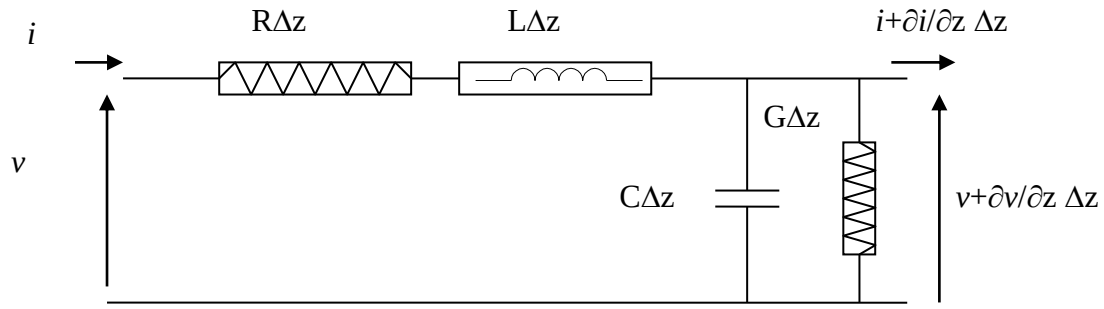


Figura 21. Modelo diferencial de la línea de transmisión

donde R, L, C y G son respectivamente la resistencia, inductancia, capacitancia y conductancia de fugas por unidad de longitud, y v e i son los valores instantáneos de tensión y corriente. La caída de tensión en la rama serie es,

$$-\frac{\partial v}{\partial z}\Delta z = R\,\Delta z\, i + L\,\Delta z\frac{\partial i}{\partial t}$$

y la variación de corriente debida a los elementos en paralelo es,

$$-\frac{\partial i}{\partial z}\Delta z = G\,\Delta z\, v + C\,\Delta z\frac{\partial v}{\partial t}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} -\frac{\partial v}{\partial z} &= R\, i + L\frac{\partial v}{\partial t} \\ -\frac{\partial i}{\partial z} &= G\, v + C\frac{\partial v}{\partial t} \end{aligned} \qquad (3.34)$$

Al comparar las ecuaciones (3.34) con las expresiones de campo se halla una gran similitud. Específicamente, si se considera a la tensión v como equivalente a la intensidad de campo E, a i como equivalente a H, y L, C y G como equivalentes respectivamente a μ, ε y σ, entonces la primera de estas ecuaciones es similar al rotor de E para una onda plana (a excepción quizás del término en R). La segunda ecuación es similar al rotor de H con excepción del signo; esto es consecuencia de que el rotor no produce un vector sino un pseudo vector.

La ecuación (3.34) se puede escribir para el caso sinusoidal en términos de fasores V e I, como

sigue:

$$-\frac{dV}{dz} = R\,I + j\omega L\,I = (R + j\omega L)I = Z\,I$$
$$-\frac{dI}{dz} = G\,V + j\omega C = (G + j\omega C)V = Y\,V \tag{3.35}$$

donde Z recibe el nombre de impedancia longitudinal por unidad de longitud, y Y es la admitancia transversal por unidad de longitud. Derivando la primera ecuación respecto a "z" y substituyendo la segunda ecuación en este resultado se obtiene finalmente,

$$\frac{d^2V}{dz^2} - Z\,Y\,V = \frac{d^2V}{dz^2} - \gamma^2 V = 0 \tag{3.36}$$

donde se ha definido una constante γ, como $\sqrt{Z\,Y}$. Esta es la conocida ecuación del telegrafista cuya solución general es de la forma,

$$V(z) = V^+ e^{-\gamma z} + V^- e^{\gamma z} \tag{3.37}$$

donde sólo falta por determinar las constantes V^+ y V^-. Esta solución está representada por voltajes viajeros de la misma forma que los campos. La constante γ es compleja, y su parte imaginaria representa el desfasaje que experimentan los voltajes al desplazarse a lo largo de la línea de transmisión,

$$\gamma = \sqrt{Z\,Y} = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)} = \alpha + j\beta \tag{3.38}$$

De manera análoga a la ecuación 1.105, se definirá la longitud de onda λ como $\lambda = 2\pi/\beta$

La corriente se halla sustituyendo (3.37) en (3.35),

$$I(z) = \frac{-1}{Z}\frac{dV(z)}{dz} = \frac{-1}{Z}\frac{d}{dz}\left(V^+ e^{-\gamma z} + V^- e^{\gamma z}\right) = \frac{-1}{Z}\left(-\gamma V^+ e^{-\gamma z} + \gamma V^- e^{\gamma z}\right)$$
$$I(z) = \frac{\gamma}{Z}\left(V^+ e^{-\gamma z} - V^- e^{\gamma z}\right) = \frac{\gamma}{Z}V^+ e^{-\gamma z} - \frac{\gamma}{Z}V^- e^{\gamma z}$$

$$I(z) = I^+(z) + I^-(z) \tag{3.39}$$

Por tanto, la relación del voltaje a la corriente para cada una de las ondas, que es la impedancia característica, será,

$$Z_{car} = \frac{V^+}{I^+} = \frac{V^-}{I^-} = \frac{Z}{\gamma} = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}} \tag{3.40}$$

A frecuencias muy altas, cuando ωL >> R y ωC >> G esta impedancia tiende a

$$Z_{car}\big|_{hf} = \sqrt{\frac{L}{C}} \tag{3.41}$$

La siguiente figura muestra el comportamiento de la impedancia característica y de la constante de propagación con la frecuencia, para el caso de una línea telefónica típica.

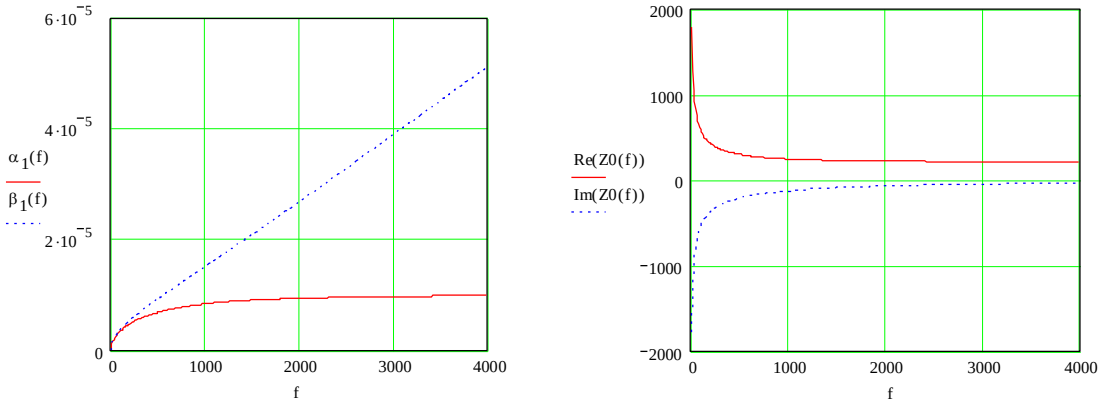


Figura 22. Comportamiento frecuencial de la impedancia característica

Como se observa, la dependencia de la constante de atenuación y de la constante de fase con la frecuencia hace que las distintas componentes de una señal de banda ancha se transmitan de manera diferente produciendo una distorsión en la señal recibida al final de la línea. Para que no haya distorsión todas las componentes espectrales deben atenuarse en la misma proporción, por lo que α debe ser una constante. De igual manera, para que no haya distorsión de fase, todas las componentes se deben atrasar la misma cantidad en tiempo, por lo que la fase debe ser proporcional a la frecuencia, es decir, $\beta \propto \omega$. Esta condición se puede lograr si $\frac{R}{L} = \frac{G}{C}$ lo cual se conoce como **línea sin distorsión**. Las líneas telefónicas aéreas presentan bajas pérdidas y poca distorsión pero en el caso de las líneas enterradas, debido a la cercanía de los conductores, la capacitancia se incrementa y se disminuye la inductancia por lo que el fenómeno de la distorsión es más notable. Para compensarlo frecuentemente se agrega inductancia artificialmente por medio bobinas espaciadas convenientemente (usualmente a distancias de 1 milla o 1 km) lo cual se conoce como "carga inductiva (inductive loading)". También se le conoce como

"**pupinización**" en honor a Mihajlo Idvorski Pupin quien desarrolló el método en 1894.

La impedancia de alta frecuencia también puede ser hallada resolviendo el problema electrostático debido a la relación entre las variables circuitales y las variables de campo para el modo TEM.

Considérese un trozo de línea de transmisión de longitud unitaria, por la cual circula una corriente constante y mantiene así mismo una diferencia de potencial estática entre sus conductores (por tanto se asume que no hay resistencia longitudinal ni fugas a través del dieléctrico). Sea C_1 un camino cualquiera entre los conductores, y C_2 un camino cerrado alrededor de uno de los conductores. Las variables circuitales son,

$$V = \int_{C_1} \vec{E} \cdot d\mathbf{l} \qquad ; \qquad I = \oint_{C_2} \vec{H} \cdot d\mathbf{l}$$

Sin embargo, para la onda TEM se tiene que el campo magnético es,

$$\vec{H} = \frac{1}{\eta} \hat{\mathbf{k}} \times \vec{E}$$

y tanto *H* como *E* yacen en el plano transversal. El producto interno vale,

$$\vec{H} \cdot d\mathbf{l} = \frac{1}{\eta} \hat{\mathbf{k}} \times \vec{E} \cdot d\mathbf{l} = \frac{1}{\eta} \hat{\mathbf{k}} \cdot \vec{E} \times d\mathbf{l} = \frac{1}{\eta} E\, dl$$

por tanto,

$$I = \oint_{C_2} \vec{H} \cdot d\mathbf{l} = \frac{1}{\eta} \oint_{C_2} E\, dl \tag{3.42}$$

En el problema electrostático se tiene que la carga sobre el conductor de longitud unitaria será,

$$q = \oint_{C_2} \varepsilon\, E\, dl$$

y, al dividir por la diferencia de potencial se obtiene la capacitancia de ese trozo de línea (de longitud unitaria),

$$C = \frac{q}{V} = \frac{\varepsilon}{V} \oint_{C_2} E\, dl$$

y la corriente,

$$I = \frac{1}{\eta} \frac{CV}{\varepsilon}$$

Por tanto, la impedancia característica será,

$$Z_{car} = \frac{V}{I} = \eta \frac{\varepsilon}{C}$$

De igual manera se puede demostrar que

$$Z_{car} = \frac{V}{I} = \eta \frac{L}{\mu} \qquad (3.43)$$

A continuación se muestran las impedancias características de algunas de otras líneas de transmisión comunes:

Línea	Impedancia característica
Elíptica confocal (a y b ejes mayores, c distancia entre focos)	$= \frac{\eta}{\pi} \ln \frac{b + \sqrt{b^2 - c^2}}{a + \sqrt{a^2 - c^2}}$
Placas colineales (D distancia entre placas, w ancho de las placas)	$\cong \frac{\eta}{\pi} \ln \frac{4D}{w}$ $\quad para\ D >> w$
Par blindado (D diámetro del blindaje, d diámetro de conductores, s distancia entre conductores)	$\cong \frac{\eta}{\pi} \left(\frac{2s}{d} \frac{D^2 - s^2}{D^2 + s^2} \right)$ $\quad para\ D >> d\ \ y\ \ s >> d$
Conductor sobre un plano de tierra (d diámetro del conductor, h altura sobre el plano)	$\cong \frac{\eta}{2\pi} \ln \frac{4h}{d}$ $\quad para\ h >> d$

Las geometrías de estos cables se presentaron anteriormente, al final de la sección 3-1

3-3 Ondas TE sobre una guía de placas paralelas

(Autovalores), (dos métodos: substitución de la condición de borde en la expresión TE, método de separación de variables).

En la sección 3-1.1 se estudió una estructura constituida por dos placas paralelas entre las cuales se desplazaba una onda cuyo campo eléctrico estaba dirigido entre las mismas. Específicamente las placas estaban sobre los planos "y=0" y "y=d", y el campo tenía la dirección del eje "y". La solución era un modo TEM.

Se estudiará a continuación la situación que se presenta cuando el campo eléctrico de la onda que se desplaza entre la misma estructura está orientado paralelamente a los planos conductores. El campo eléctrico tiene dirección **i** y se desplaza a lo largo del eje "z".

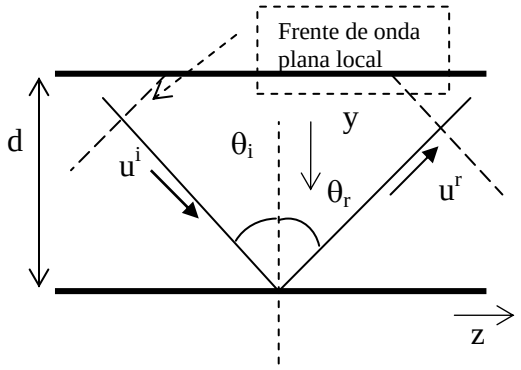


Figura 23. Geometría para el estudio de los modos TE y TM

Es evidente que si se integra el campo eléctrico a lo largo de un camino entre las placas el resultado es cero, por tanto este caso no puede ser resuelto por el método utilizado anteriormente para el caso de los modos TEM. Se mostrarán a continuación dos formas de atacar el problema: una consiste en comparar esta situación con la de incidencia oblicua de una onda TEM sobre un conductor perfecto y extenderlo al caso de dos conductores. La otra forma será resolver directamente las ecuaciones de campo para un modo TE.

El campo total para la incidencia oblicua viene dado por las ecuaciones (2.12) y (2.13) modificadas para esta orientación de los campos,

$$\vec{E}(y,z) = E(y,z)\hat{\mathbf{i}} = E_0^i\, e^{-j\beta_z z}\left(-2j\sin(\beta_y y)\right)\hat{\mathbf{i}} \tag{3.44}$$

$$\vec{H}(y,z) = \frac{\beta_z}{\omega\mu}E(y,z)\hat{\mathbf{j}} - \frac{\beta_y}{\omega\mu}E_0^i\, e^{-j\beta_z z}\left(2\cos(\beta_y y)\right)\hat{\mathbf{k}} \tag{3.45}$$

Para satisfacer la condición de borde en el plano y=d será necesario que el producto $\beta_y d$ sea un múltiplo entero de π radianes. Esto establece entonces una condición sobre β_y y en consecuencia sobre β_z y el ángulo de incidencia de las ondas planas constituyentes. Sólo son posibles algunos valores de β_y,

$$\beta_y = n\frac{\pi}{d} \qquad \forall n = 1,2,\cdots \tag{3.46}$$

Similarmente, el ángulo de incidencia será dependiente de "n" por cuanto:

$$\cos\theta_i = \cos\theta_r = \frac{\beta_y}{\omega\sqrt{\mu\varepsilon}}$$

Para cada uno de estos valores existe una solución diferente del campo dada por las expresiones anteriores, y por tanto reciben el nombre de valores característicos o autovalores (eigenvalues). Las soluciones asociadas son entonces las funciones características (eigenfunctions). Como β_y es el producto de β^i por el coseno director en la dirección del eje "y", entonces existirá también un conjunto de valores discretos de ángulos, cada uno correspondiente a una solución. Finalmente, como la suma de los cuadrados de los cosenos directores debe ser la unidad se tiene que,

$$\beta_y^2 + \beta_z^2 = \left(\beta^i\right)^2 \tag{3.47}$$

y, como no hay pérdida, entonces β^i =k el número de onda, por tanto

$$\beta_z^2 = k^2 - \beta_y^2 = \omega^2\mu\varepsilon - \left(n\frac{\pi}{d}\right)^2 \tag{3.48}$$

Dependiendo del valor de "n" esta diferencia puede tener valores positivos o negativos. Las implicaciones de esto se analizarán posteriormente. Por los momentos se analizará el resultado para el campo magnético. La ecuación (3.45) muestra que el campo magnético tiene una componente transversal y una longitudinal. Como se mostró en (2.18) es la componente transversal, conjuntamente con el campo eléctrico, la responsable de la transmisión de potencia a lo largo de la estructura. La solución obtenida puede entonces considerarse como una onda que se propaga a lo largo del eje "z" pero que es estacionaria en la dirección "y". La longitud de onda en la dirección “z” vale $\lambda = 2\pi/\beta_z$. Similarmente se puede definir una longitud de onda en la dirección “y” como

$$\lambda_c = \frac{2\pi}{\beta_y} = \frac{2\pi}{n\pi/d} = \frac{2d}{n}$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación 3.47 se obtiene la siguiente relación:

$$\left(\frac{2\pi}{\lambda_z}\right)^2 = \left(\frac{2\pi}{\lambda_0}\right)^2 - \left(\frac{2\pi}{\lambda_c}\right)^2 \tag{3.49}$$

En donde se ha definido λ_0 como la longitud de onda en espacio libre $\lambda_0=2\pi/\beta_i$.

El método mostrado produce el resultado correcto para el caso de la guía de placas paralelas. Sin embargo, cuando se estudian estructuras más complejas es necesario disponer de un método

general para hallar las soluciones. Este método consiste en reducir la ecuación vectorial de Helmholtz a una expresión escalar, para luego resolver la ecuación diferencial resultante por el método de separación de variables para hallar los autovalores y las funciones características.
La ecuación (3.6) establece que, para un modo TE, los campo son,

$$\vec{E}^{TE} = \vec{E}_t^{TE} \qquad ; \qquad \vec{H}^{TE} = \vec{H}_t^{TE} + H_z^{TE}\mathbf{k} \tag{3.5}$$

y que,

$$\nabla = \nabla_t - \gamma \hat{\mathbf{k}} \tag{3.7}$$

Al sustituir en las ecuaciones de Maxwell se obtiene,

$$\left(\nabla_t - \gamma\hat{\mathbf{k}}\right)\times \vec{E}^{TE} = -j\omega\mu\left(\vec{H}_t^{TE} + H_z^{TE}\hat{\mathbf{k}}\right) \tag{3.50}$$

$$\left(\nabla_t - \gamma\hat{\mathbf{k}}\right)\times\left(\vec{H}_t^{TE} + H_z^{TE}\hat{\mathbf{k}}\right) = j\omega\varepsilon\ \vec{E}^{TE} \tag{3.51}$$

$$\left(\nabla_t - \gamma\hat{\mathbf{k}}\right)\cdot \varepsilon\,\vec{E}^{TE} = 0 \tag{3.52}$$

$$\left(\nabla_t - \gamma\hat{\mathbf{k}}\right)\cdot\left(\vec{H}_t^{TE} + H_z^{TE}\,\mathbf{k}\right) = 0 \tag{3.53}$$

donde se supone al medio libre de cargas y de corrientes. Las corrientes que circulan por los conductores se tomarán en cuenta posteriormente al considerar las condiciones de frontera.
La separación en componentes transversales y longitudinales produce los siguientes resultados:

$$\nabla_t \times \vec{E}^{TE} = -j\omega\mu\ H_z^{TE}\hat{\mathbf{k}} \tag{3.54}$$

$$\left(-\gamma\hat{\mathbf{k}}\right)\times\vec{E}^{TE} = -j\omega\mu\ \vec{H}_t^{TE} \tag{3.55}$$

$$\nabla_t \times \vec{H}^{TE} = 0 \tag{3.56}$$

$$\left(\nabla_t H_z^{TE} + \gamma\,\vec{H}_t^{TE}\right)\times\hat{\mathbf{k}} = j\omega\varepsilon\,\vec{E}^{TE} \tag{3.57}$$

$$\nabla_t \cdot \varepsilon\vec{E}^{TE} = 0 \tag{3.58}$$

$$\nabla_t \cdot \vec{H}_t^{TE} = \gamma\, H_z^{TE} \tag{3.59}$$

La ecuación (3.55) permite definir una impedancia de onda como,

$$Z_H = \frac{j\omega\mu}{\gamma} \tag{3.60}$$

$$\hat{\mathbf{k}} \times \vec{E}^{TE} = Z_H \, \vec{H}_t^{TE} \tag{3.61}$$

la cual es idéntica al resultado previamente hallado cuando γ=jβ.

(3.56) establece que H_t^{TE} es irrotacional y por tanto puede ser hallado como el gradiente de una función potencial. De hecho, si se sustituye (3.55) en (3.57) se obtiene,

$$\left(\nabla_t \, H_z^{TE} + \gamma \, \vec{H}_t^{TE}\right) = j\omega\varepsilon \frac{j\omega\mu}{\gamma} \vec{H}_t^{TE}$$

y, finalmente,

$$\vec{H}_t^{TE} = \frac{-\gamma}{\omega^2\mu\varepsilon + \gamma^2} \nabla_t H_z^{TE} \tag{3.62}$$

Por otra parte, si este resultado se substituye en (3.59) se obtiene,

$$\nabla_t^2 H_z^{TE} + \left(\omega^2\mu\varepsilon + \gamma^2\right) H_z^{TE} = 0$$

la cual es la forma escalar de la ecuación de Helmholtz. La cantidad entre paréntesis es una constante definida como,

$$k_c^2 = (\omega^2\mu\varepsilon + \gamma^2) = k_0^2 + \gamma^2 \tag{3.63}$$

por lo que la ecuación queda

$$\nabla_t^2 H_z^{TE} + k_c^2 H_z^{TE} = 0 \tag{3.64}$$

Esta es una ecuación diferencial en derivadas parciales de las coordenadas transversales. De hecho es una ecuación de propagación en el plano transversal, donde k_c representa la constante de propagación en dicho plano. Como la constante de propagación en el medio es $k_0 = \omega\sqrt{\mu\epsilon}$ es conveniente definir una constante ω_c de manera que $k_c = \omega_c\sqrt{\mu\epsilon}$. Como se verá más adelante esta nueva constante tiene el significado de una frecuencia de corte.

Es interesante notar que este resultado se podía anticipar directamente de la ecuación vectorial de Helmholtz al hacer la separación en componentes transversales y longitudinales. En efecto, debido a que el Laplaciano es la divergencia del gradiente, el operador ∇^2 se puede expresar, en términos de componentes transversales y longitudinales como:

$$\nabla^2 = \nabla \bullet \nabla = \left(\nabla_t - \gamma\,\hat{\mathbf{k}}\right)\bullet\left(\nabla_t - \gamma\,\hat{\mathbf{k}}\right) = \nabla_t^2 - 2\gamma\nabla_t \bullet \hat{\mathbf{k}} + \gamma^2 = \nabla_t^2 + \gamma^2$$

Este operador se sustituye en la ecuación de propagación para **H** y se obtiene:

$$\nabla^2\overline{H} + k_0^2\overline{H} = \left(\nabla_t^2 + \gamma^2\right)\left(\overline{H}_t + H_z\,\hat{\mathbf{k}}\right) = 0$$

Esto da origen a dos ecuaciones, una vectorial en la componente transversal y la otra escalar en la componente longitudinal.

$$\nabla_t^2\overline{H}_t + \left(\gamma^2 + k_0^2\right)\overline{H}_t = 0$$
$$\nabla_t^2 H_z + \left(\gamma^2 + k_0^2\right)H_z = 0$$

Sin embargo, aún es necesario trabajar con las ecuaciones básicas para poder vincular los campos transversales (H_t y E_t) con la componente escalar (en este caso H_z).

Para hallar las soluciones características y los autovalores es necesario aplicar las condiciones de frontera. Para ello se acostumbra utilizar el método de separación de variables expresando H_z en un sistema de coordenadas apropiado a la estructura que se está estudiando a fin de que las condiciones de frontera adquieran una forma sencilla.

Para la guía de placas paralelas es conveniente utilizar coordenadas rectangulares y escribir a H_z como el producto de dos funciones, (debe recordarse que este resultado debe a su vez multiplicarse por $e^{-\gamma z}$ para tener la variación en las tres coordenadas del espacio).

$$H_z(x,y) = f(x)\,g(y)$$

Entonces,

$$\nabla_t^2 H_z^{TE} + k_c^2 H_z^{TE} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} fg + \frac{\partial^2}{\partial y^2} fg + k_c^2 fg = 0$$

$$g\frac{d^2}{dx^2} f + f\frac{d^2}{dy^2} g + k_c^2 fg = 0$$

$$\frac{1}{f}\frac{d^2}{dx^2} f + \frac{1}{g}\frac{d^2}{dy^2} g = -k_c^2$$

El primer sumando es sólo función de "x" y el segundo sólo de "y". Si su suma es una constante, cada sumando por separado debe ser una constante; por tanto la ecuación se separa como

$$\frac{1}{f}\frac{d^2}{dx^2} f = -k_x^2 \qquad (3.65)$$

$$\frac{1}{g}\frac{d^2}{dy^2}g = -k_y^2 \tag{3.66}$$

donde

$$k_x^2 + k_y^2 = k_c^2 \tag{3.67}$$

Las soluciones a estas ecuaciones diferenciales son senos y cosenos,

$$f(x) = A \cos(k_x x) + B \sin(k_x x)$$

$$g(y) = C \cos(k_y y) + D \sin(k_y y)$$

donde resta por hallar los coeficientes y las constantes de separación.
Substituyendo en (3.58) se tiene,

$$\vec{H}_t^{TE} = \frac{-\gamma}{\omega^2\mu\varepsilon + \gamma^2}\nabla_t H_z^{TE} = \frac{-\gamma}{k_c^2}\left(g\frac{df}{dx}\hat{\mathbf{i}} + f\frac{dg}{dy}\hat{\mathbf{j}}\right)e^{-\gamma z}$$

y, de (3.60),

$$\vec{E}_t^{TE} = \frac{-j\omega\mu}{k_c^2}\left(-g\frac{df}{dx}\hat{\mathbf{j}} + f\frac{dg}{dy}\hat{\mathbf{i}}\right)e^{-\gamma z}$$

Como en esta estructura E_t es independiente de "x" y tiene dirección **i** se tiene que "f" debe ser una constante, en consecuencia k_x debe ser cero. Por tanto

$$\vec{E}_t^{TE} = \frac{-j\omega\mu}{k_c^2}\left(-Ak_y C\sin(k_y y) + AD k_y \cos(k_y y)\right)\mathbf{i}\, e^{-\gamma z}$$

En la sección 3.6, al considerar el caso de la guía rectangular, se tendrá que existe adicionalmente una condición de frontera en la dirección “x” y por tanto k_x tendrá que ser diferente de cero. El campo tangencial debe ser cero en los conductores, por tanto la condición de frontera será E_t^{TE} = 0 en "y=0" y en "y=d".

$$y = 0 \;\Rightarrow D = 0$$
$$y = d \;\Rightarrow k_y d = n\pi \quad \forall n = 1,2,\cdots$$

por tanto,

$$\vec{E}_t^{TE} = \frac{j\omega\mu}{k_c}AC\sin(k_y y)e^{-\gamma z}\,\hat{\mathbf{i}}$$

lo cual es idéntico a los resultados hallados anteriormente cuando se identifica a $\gamma = j\,\beta_z$, $k_c = k_y = \beta_y$ y $k_0 = \beta^i$. Es importante notar que k_c no tiene un valor único, sino que más bien tiene un conjunto de valor discretos que dependen del índice "n". Es por esta razón que frecuentemente se escribe como $k_{c,n}$ (En las guías de ondas existen dos condiciones de frontera que establecen dos conjuntos de índices, por lo que en ese caso se escribirá $k_{c,mn}$)

3-4 Ondas TM guiadas.

En el punto anterior se estudió una situación cuando el campo eléctrico era paralelo a las placas que constituyen la guía de ondas y se halló que la solución era un conjunto de modos TE. Se estudiará ahora la situación complementaría, cuando el campo magnético es paralelo a las placas, pero el campo eléctrico no es perpendicular a ellas. De acuerdo a lo estudiado en 2-1.2 esto corresponde a un modo Transverso-Magnético (TM). La estructura es la misma anterior, con las placas paralelas al plano (x,z), pero ahora el campo magnético tiene dirección **i**. El campo eléctrico tiene además de la componente en dirección **j**, una en la dirección de propagación **k**. Las ecuaciones de partida son la (3.7) y la (3.8)

$$\vec{E}^{TM} = \vec{E}_t^{TM} + E_z^{TM}\hat{\mathbf{k}} \qquad ; \qquad \vec{H}^{TM} = \vec{H}_t^{TM} \tag{3.7}$$

$$\nabla = \nabla_t - \gamma\hat{\mathbf{k}} \tag{3.8}$$

y las ecuaciones de Maxwell en términos de estas componentes de campo son,

$$\left(\nabla_t - \gamma\hat{\mathbf{k}}\right)\times\left(\vec{E}_t^{TM} + E_z^{TM}\hat{\mathbf{k}}\right) = -j\omega\mu\vec{H}_t^{TM} \tag{3.68}$$

$$\left(\nabla_t - \gamma\hat{\mathbf{k}}\right)\times\vec{H}_t^{TM} = j\omega\varepsilon\left(\vec{E}_t^{TM} + E_z^{TM}\hat{\mathbf{k}}\right) \tag{3.69}$$

$$\left(\nabla_t - \gamma\hat{\mathbf{k}}\right)\cdot\varepsilon\left(\vec{E}_t^{TM} + E_z^{TM}\hat{\mathbf{k}}\right) = 0 \tag{3.70}$$

$$\left(\nabla_t - \gamma\hat{\mathbf{k}}\right)\cdot\vec{H}_t^{TM} = 0 \tag{3.71}$$

La separación en componentes longitudinales y transversales produce,

$$\nabla_t\times\vec{E}_t^{TM} = 0 \tag{3.72}$$

$$\left(\nabla_t E_z^{TM} + \gamma\, \vec{E}_t^{TM}\right)\times \hat{\mathbf{k}} = -j\omega\mu \vec{H}_t^{TM} \tag{3.73}$$

$$\nabla_t \times \vec{H}_t^{TM} = j\omega\varepsilon\, E_z^{TM}\, \hat{\mathbf{k}} \tag{3.74}$$

$$-\gamma\, \hat{\mathbf{k}} \times \vec{H}_t^{TM} = j\omega\varepsilon\, \vec{E}_t^{TM} \tag{3.75}$$

$$\nabla_t \cdot \vec{H}_t^{TM} = 0 \tag{3.76}$$

La impedancia de onda Z_E se define a partir de la ecuación (3.75),

$$Z_E = \frac{\gamma}{j\omega\varepsilon} \tag{3.77}$$

$$\vec{E}_t^{TM} = Z_E\, \vec{H}_t^{TM} \times \hat{\mathbf{k}} \tag{3.78}$$

De (3.72) se tiene que E_t^{TM} es irrotacional por lo que puede ser hallada como el gradiente de una función potencial. Esta función escalar es E_z^{TM}. Substituyendo (3.78) en (3.73) se llega a,

$$\left(\nabla_t E_z^{TM} + \gamma\, \vec{E}_t^{TM}\right) = \frac{j\omega\mu\, j\omega\varepsilon}{\gamma}\, \vec{E}_t^{TM}$$

de donde

$$\vec{E}_t^{TM} = \frac{-\gamma}{\omega^2\mu\varepsilon + \gamma^2}\, \nabla_t E_z^{TM} \tag{3.79}$$

De (3.70) se tiene que

$$\nabla_t \cdot \vec{E}_t^{TM} - \gamma\, E_z^{TM} = 0 \tag{3.80}$$

y al sustituir en ésta el resultado anterior se llega a,

$$\nabla_t^2 E_z^{TM} + \left(\omega^2\mu\varepsilon + \gamma^2\right) E_z^{TM} = 0 \tag{3.81}$$

que es la ecuación escalar de Helmholtz para el modo TM. La constante k_c se define de igual forma que en (3.67).

De aquí en adelante se sigue el mismo procedimiento que para los modos TE, es decir, se aplica separación de variables para convertir la ecuación en derivadas parciales en un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias y luego se aplican las condiciones de borde para hallar los autovalores y las funciones características. Los autovalores son las $k_{c,n}$ y en consecuencia las

$\omega_{c,n}$. La constante de propagación γ presenta una relación no lineal con la frecuencia de trabajo lo cual se conoce como comportamiento dispersivo ya que las velocidades de grupo son diferentes para diferentes frecuencias.

Este comportamiento dispersivo se observa también en las impedancias de onda. De hecho, al sustituir el valor de γ en las expresiones 3.60 y 3.77 de las impedancias de los modos TE y TM respectivamente se obtiene (para pérdidas pequeñas):

$$\begin{aligned} Z_{Hn} &= \frac{\eta}{\sqrt{1-\left(\omega_{c,n}/\omega\right)^2}} \\ Z_{En} &= \eta\sqrt{1-\left(\omega_{c,n}/\omega\right)^2} \\ \lambda_{gn} &= \frac{\lambda_0}{\sqrt{1-\left(\omega_{c,n}/\omega\right)^2}} \end{aligned} \qquad (3.82)$$

En estas expresiones se han indicado explícitamente los subíndices “n” (m y n en el caso de guías de onda), para indicar que todas estas cantidades son diferentes para los distintos modos, aún para una misma frecuencia de trabajo.

3-5 Interpretación física de la propagación multi-modo.

Al final de la sección 3-3, al analizar la ecuación (3.48), se mencionó que se podían presentar varios tipos de comportamiento dependiendo del valor de "n". Ahora se analizarán estos comportamientos.

En primer lugar se debe recordar que, debido a la linealidad del medio, el campo solución es una superposición de todas las soluciones encontradas. Cada una de estas soluciones aporta una contribución al campo total que depende de las condiciones de frontera de la estructura que se está considerando. Algunas de estas contribuciones pueden incluso ser cero dependiendo de la geometría: por ejemplo, una discontinuidad introducida perpendicularmente a las placas conductoras de la guía estudiada anteriormente puede estimular la producción de modos TM en preferencia a los TE. Sin embargo, el campo resultante aún puede ser extremadamente complejo en las inmediaciones de la discontinuidad.

¿Cuál es la consecuencia de la propagación simultánea de todos estos modos?

En primer lugar se calcularán las velocidades de fase y de grupo a partir de la ecuación (3.48)

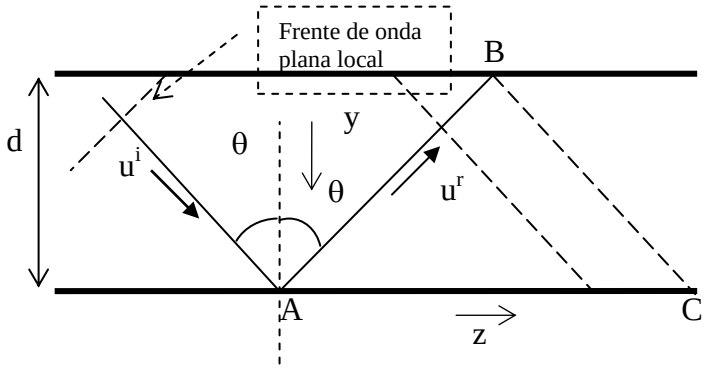


Figura 24. Velocidades de fase y de grupo en la guía de ondas

Asimismo, la longitud de onda vale:

$$\lambda = 2\pi/\beta_z = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega^2\mu\varepsilon - \left(n\frac{\pi}{d}\right)^2}} =$$

La velocidad de fase es $v_f = \omega/\beta_z = \lambda\,\omega/2\pi$

$$v_f = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}\sqrt{1-\left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2}} = \frac{v}{\sqrt{1-\left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2}} \qquad (3.83)$$

donde "v" es la velocidad de propagación en el medio, y se ha definido una constante ω_c como,

$$\omega_c = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} n\frac{\pi}{d} \qquad (3.84)$$

De la figura anterior se observa que el frente de ondas planas se ha desplazado de la posición "A" a la "B" para la onda TEM que se mueve a la velocidad "v". Dicho frente se ha movido de la posición "A" a la "C" para la onda TE (o TM) que se mueve a la velocidad de fase v_f.

De la geometría de la figura se observa que el ángulo de inclinación respecto a la normal a la pared es tal que: $v_f = \frac{v}{\sin\theta}$, por lo que $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\omega_c}{\omega}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_c}\right)$. Esto significa que la onda TE (o TM) se puede obtener por la superposición de dos ondas TEM, con la polarización adecuada, que viajan rebotando entre las paredes de las placas paralelas, inclinadas en un ángulo dado por la expresión anterior. Si la frecuencia de trabajo es mayor que la frecuencia de corte de un modo dado, el ángulo correspondiente es real por lo que se está en presencia de un modo real. Si, por

el contrario, la frecuencia es menor que la frecuencia de corte, el coseno es mayor que uno, lo cual corresponde a un ángulo imaginario, por lo que estamos en presencia de un modo evanescente, como se describe más adelante. Adicionalmente esta representación es la base de la teoría del espectro angular que se describe en la sección 3-5.2.

De igual manera se definirá una constante λ_c como:

$$\lambda_c = 2\pi/\beta_y = \frac{2\pi}{\omega_c\sqrt{\mu\varepsilon}} = \frac{v}{f_c} = \frac{2d}{n}$$

En consecuencia

$$\left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 = \left(\frac{1}{\lambda_0}\right)^2 - \left(\frac{1}{\lambda_c}\right)^2$$

La velocidad de grupo es,

$$v_g = \frac{1}{d\beta_z/d\omega} = \frac{1}{d/d\omega\left(\sqrt{\mu\varepsilon}\,\sqrt{\omega^2-\omega_c^2}\right)} = v \quad \sqrt{1-\left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2} \qquad (3.85)$$

Estas expresiones indican que tanto la velocidad de fase como la velocidad de grupo son funciones de frecuencia. Adicionalmente se tiene que ambas velocidades dependen también de la constante ω_c definida en (3.84), la cual es a su vez dependiente de β_y y en consecuencia, de las dimensiones transversales de la guía. Por tanto, aún para el mismo valor de frecuencia de la señal, cada uno de los modos se propaga a una velocidad diferente. Si ω es mayor que ω_c , entonces los radicales son reales.

También debe notarse que la longitud de onda es diferente para cada modo, aún para la misma frecuencia de excitación.

Como indica (3.83) la velocidad de fase es mayor que la velocidad de propagación de la onda TEM en el medio, lo cual no constituye una violación a las leyes de la relatividad como ya fue discutido anteriormente. La velocidad de grupo es menor que la velocidad de propagación de la onda TEM.

Estos resultados indican que si existen varios modos propagándose en el medio, entonces la información que se envía recorrerá el medio por diferentes mecanismos, cada uno de ellos con su propia velocidad de grupo. Se dice entonces que existe propagación multi-trayecto. Cuando estas ondas alcanzan el receptor habrán empleado tiempos diferentes para recorrer el medio, por lo que se observará la llegada de **la misma** información en diferentes instantes. Esto se traduce

en la recepción de ecos que en el caso de la televisión producen la formación imágenes "fantasmas". De manera similar, en el caso de guías de ondas o fibras ópticas que transportan señales digitales, tales ecos pueden ocasionar interferencia ínter simbólica entre pulsos consecutivo, lo cual obliga a disminuir la velocidad de transmisión.

Cuando ω_c es mayor ω, entonces los radicales son imaginarios y no existen ni v_f ni v_g. Por tanto no hay propagación de la señal en estos modos. En efecto si se substituye el valor de β_z en la constante de propagación se tiene, $\gamma = j\,\beta_z$, y si β_z se hace imaginario, entonces la constante de propagación se hace real por lo que sólo existirá atenuación de la señal pero no propagación. En estas condiciones se dice que el modo es **evanescente**. Esto significa que cada modo se comporta como una especie de filtro pasa-altos cuya frecuencia de corte es ω_c. Para una frecuencia de trabajo dada sólo se propagarán aquellos modos cuya frecuencia de corte sea inferior a ella,

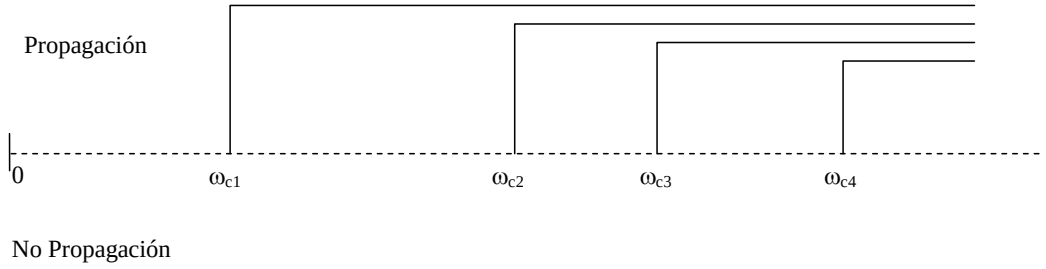


Figura 25. Frecuencias de corte de la guía de ondas

En el ejemplo anterior, si la frecuencia de trabajo ω está entre ω_{c3} y ω_{c4} , entonces se estarán propagando simultáneamente sólo los tres primeros modos. Esta gráfica es simplemente descriptiva de las condiciones de propagación y no-propagación. Para entender mejor el comportamiento en el entorno de la frecuencia de corte, se considerará el caso de una guía con pérdidas pequeñas (pero no cero). La constante de propagación para un modo dado vale:

$$\gamma = k_0 \sqrt{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2 \mu\varepsilon + j\frac{\omega}{\omega_c}\frac{\mu\sigma}{\omega_c}} = \alpha + j\beta$$

Si σ=0 se tiene que para frecuencia por debajo del corte γ será enteramente real, y por encima del corte será imaginaria pura y variando parabólicamente con la frecuencia.

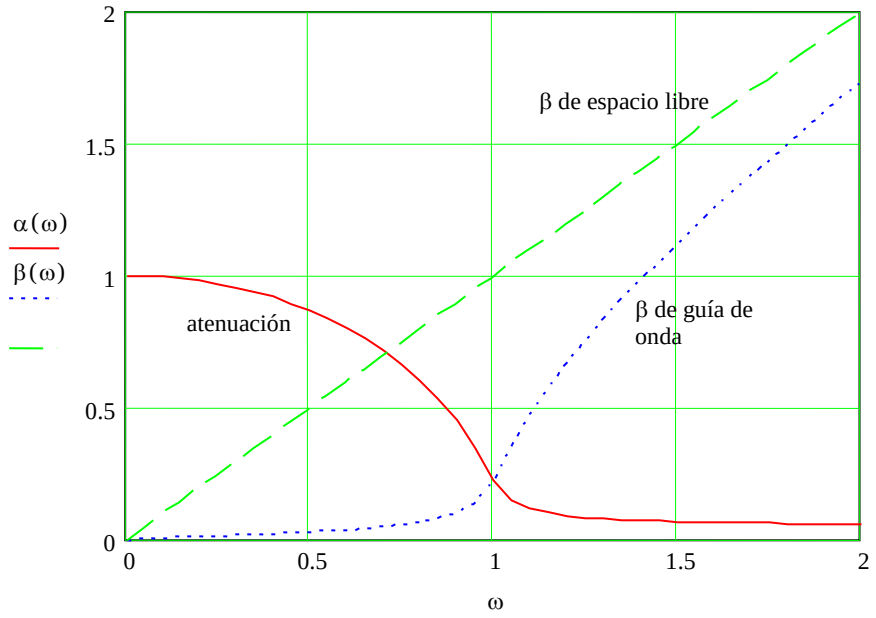
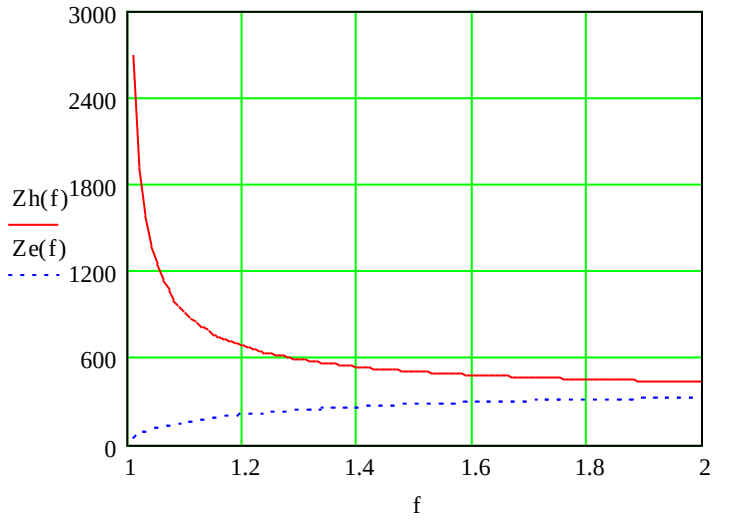


Figura 3.9

Como se aprecia, por debajo del corte la atenuación es grande y, a medida que nos alejamos de la frecuencia de corte la atenuación de la guía decrece (a diferencia de lo que sucede con los cables). La constante de fase varía en forma aproximadamente parabólica en el entorno de la frecuencia de corte, y a altas frecuencias tiende asintóticamente al valor de espacio libre. Este comportamiento dispersivo de la guía debe ser compensado por medio de un ecualizador en los sistemas de comunicaciones de alta capacidad, en especial cuando transportan señales de televisión ya que la información de color viaja en la fase de la señal.

La siguiente figura muestra el comportamiento dispersivo tanto de las impedancias de onda como de las velocidades de fase y de grupo. Las velocidad están referidas a la velocidad de propagación en el medio y las frecuencias están referidas a la frecuencia de corte del modo correspondiente.



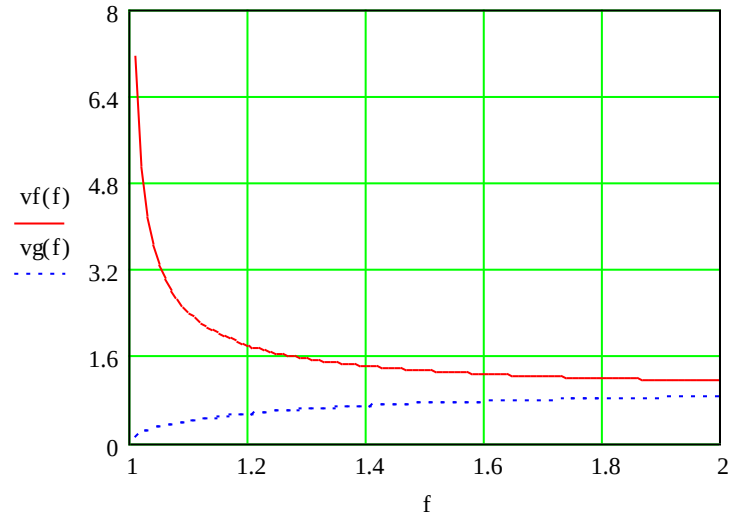


Figura 27 Comportamiento frecuencial de la velocidad de fase y de grupo

3.5.1 Concepto de modo dominante.

Debido a lo expuesto en el punto anterior, es necesario ser cuidadosos en la escogencia de la frecuencia de trabajo para una determinada estructura de transmisión, o viceversa, dada la frecuencia de trabajo escoger apropiadamente el sistema de transmisión. Una frecuencia demasiado baja estará por debajo de las frecuencias de corte de los modos y no habrá propagación. Por otra parte, una frecuencia demasiado alta producirá propagación multimodo, cada uno de ellos desplazándose a una velocidad diferente. Lo ideal es escoger la frecuencia de trabajo en el intervalo de frecuencias comprendido entre las frecuencias de corte del primer y segundo modo. De esta manera sólo se estará propagando un modo y no habrá los problemas

descritos. Se dice entonces que este modo es el **DOMINANTE** pues estará presente en todas las situaciones de propagación. Sin embargo, debe notarse que no siempre se trabaja con estructuras monomodo. De hecho, si las dimensiones de la guía son lo suficientemente grandes, es posible que el gran número de modos TE y/o TM se combinen produciendo una onda que sea localmente TEM (en el centro de la estructura) y sólo se observarán las componentes in homogéneas cerca de las paredes, las cuales no afectarán a la aplicación específica. Un ejemplo de ello son los alimentadores multimodo utilizados en la segunda generación de antenas terrenas como es el caso de Camatagua II: El sistema utiliza guías de gran diámetro (en comparación a la longitud de onda) para permitir la propagación de un modo cuasi TEM que viaja rebotando en "espejos" de microondas, entre el transmisor y la antena; los espejos están ubicados en las uniones de manera de permitir el movimiento tanto en azimut como en elevación sin cambiar la geometría del campo electromagnético, como se muestra en la siguiente figura.

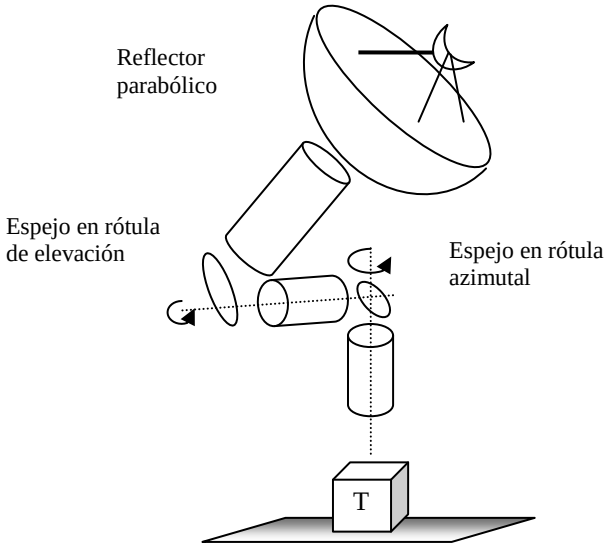


Figura 28. Antena con alimentador multimodo

3.5.2 Introducción a la teoría del espectro angular.

En el punto anterior se mostró que cada modo TE o TM puede expresarse como la superposición de dos ondas planas que viajan inclinadas en un ángulo

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\omega_c}{\omega}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_c}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{n\lambda_0}{2d}\right)$$ respecto a la dirección transversal. A medida que aumenta la frecuencia de la señal por encima de la frecuencia de corte, el argumento del coseno disminuye, por lo que el ángulo aumenta acercándose a $\pi/2$ en el límite; consecuentemente, tanto v_p como v_f tienden a la velocidad "v" de propagación de la onda plana.

Por otra parte cuando ω disminuye acercándose a ω_c, al argumento del coseno tiende a 1, el ángulo θ tiende a 0, la velocidad de grupo tiende a 0 y la velocidad de fase crece hacia el infinito. En la frecuencia de corte la onda se detiene. A frecuencias más bajas no hay propagación pues $\cos\theta > 1$ y esto corresponde a un ángulo imaginario. Esta representación en términos de ondas planas se expresará en forma espectral como dos líneas:

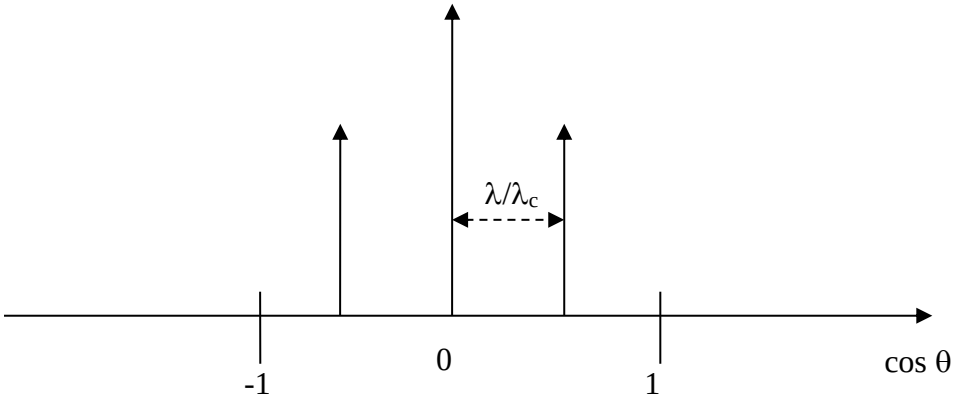


Figura 29. Espectro angular de ondas planas

Esto se puede extender al caso de múltiples modos como sigue:

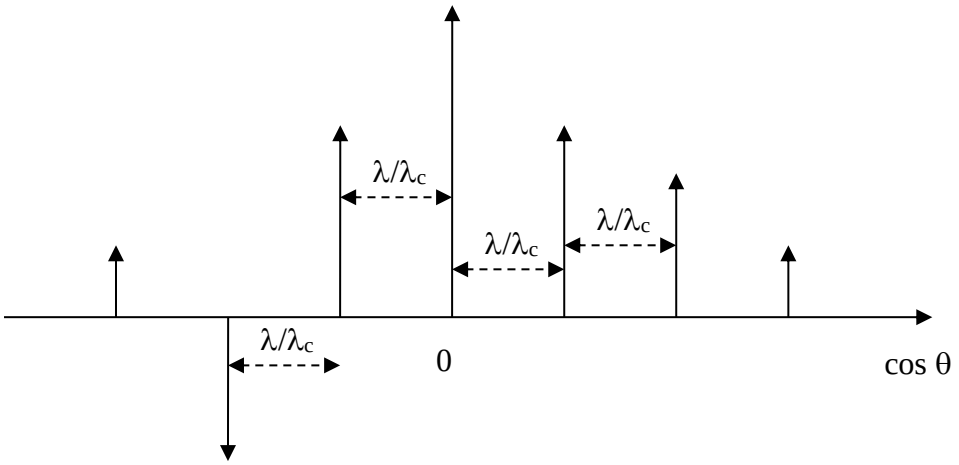


Figura 30. Espectro angular de ondas planas de múltiples modos

El signo negativo se ha usado para al caso de las componentes TM, para tomar en cuenta el cambio en la polarización de las ondas TEM componentes. La separación entre las componentes transversales es inversa a las dimensiones transversales de la guía de placas paralelas. Estas líneas espectrales son equivalentes a los coeficientes de una serie de Fourier porque el intervalo de integración es finito. En el espacio libre se puede utilizar la misma representación, pero ahora la serie es reemplazada por la integral (o transformada) porque el intervalo de integración se extiende hasta el infinito. De esta forma el campo en una región se puede sintetizar como la superposición de un número infinito de ondas planas que llegan desde todas las direcciones del espacio, todas de la misma frecuencia, pero que difieren en amplitud y dirección. Aquellas ondas cuyo coseno director sea menor de la unidad corresponden a ángulos reales y por tanto representan ondas propagantes. Sin embargo, en la representación espectral tienen cabida adicionalmente ondas cuyo coseno director es mayor que la unidad; las mismas corresponden a ondas evanescentes, las cuales, si bien no se propagan, almacenas energía y pueden ser necesarias para satisfacer las condiciones de borde de una estructura determinada. Por ejemplo, una discontinuidad en la guía podría excitar algunos de estos modos evanescentes, los cuales sólo existirán en el entorno de tal discontinuidad pero no acarrearán información a lo largo de la guía. Así como la teoría del espectro angular permite sintetizar el campo en una región a partir de un número finito (o infinito) de ondas planas llegando a la región desde todas las direcciones del espacio (reales o imaginarias), por reciprocidad es también posible utilizar las ondas

componentes para estimar el campo radiado desde una región del espacio donde se conozca la distribución de los campos (eléctricos o magnéticos). Esto halla aplicaciones en la teoría de antenas para la predicción del patrón de radiación de una antena en la cual se conozca la distribución del campo en la apertura. Esto se discutirá con más profundidad en la sección 4-5.

3.6 Guía de ondas rectangular.

En las secciones 3-3 y 3-4 se resolvió el caso de la propagación entre dos placas paralelas infinitas. Si bien tal estructura no existe en la práctica sirvió para introducir dos conceptos: la propagación TEM y posteriormente su aplicación en estructuras tales como cables paralelos y cables coaxiales. Adicionalmente se introdujeron los conceptos de propagación TE y TM en dicha estructura. Estos últimos serán discutidos a continuación en estructuras prácticas tales como la guía de ondas rectangular. En frecuencias de microondas no se utilizan normalmente cables paralelos o coaxiales debido a las altas pérdidas que presentan, en especial si consideran tendidos largos como los utilizados entre los transmisores y las antenas ubicadas en torres altas. En su lugar se utilizan guías de onda con secciones transversales de diferente forma y que no utilizan propagación TEM. Una de las más sencillas de estudiar es la guía de ondas rectangular, porque las condiciones de frontera se aplican de forma natural en el sistema de coordenadas rectangular.

Considérese en primer lugar una estructura como la mostrada en la figura, constituida por cuatro paredes conductoras ubicadas en los planos x=0, x=a, y=0 y=b.

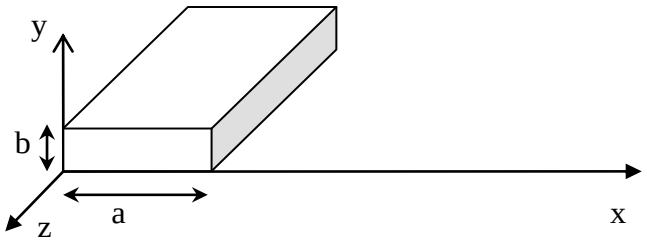


Figura 31. Guía de ondas rectangular

La propagación ocurre a lo largo del eje "z" como en la estructura de placa placas paralelas de 3-3. Utilizando el mismo razonamiento que en 3-3, se va a hallar una solución TE utilizando la ecuación escalar de Helmholtz (3.63). Aplicando la separación de variables en coordenadas rectangulares se obtienen como soluciones generales para f(x) y g(y), lo siguiente:

$$f(x) = A \cos (k_x x) + B \sin (k_x x)$$

$$g(y) = C \cos (k_y y) + D \sin (k_y y)$$

$$\frac{df}{dx} = -A\,k_x \sin(k_x x) + B\,k_x \cos(k_x x)$$
$$\frac{dg}{dy} = -C\,k_y \sin(k_y y) + D\,k_y \cos(k_y y)$$

donde resta por hallar los coeficientes y las constantes de separación. El campo eléctrico transversal había sido hallado anteriormente como:

$$\vec{E}_t^{TE} = \frac{-j\omega\mu}{k_c^2}\left(-g\frac{df}{dx}\hat{\mathbf{j}} + f\frac{dg}{dy}\hat{\mathbf{i}}\right)e^{-\gamma z}$$

En las paredes horizontales la condición de frontera es E_x=0, para y=0 y y=b lo cual implica dg/dy=0. De aquí se tiene inmediatamente que D=0 y k_y=n π/b

Similarmente, en las paredes verticales, E_y=0 para x=0 y x=a. Por tanto df/dx debe ser cero para ambas situaciones y en consecuencia B=0 y k_x=m π/a. Finalmente se tiene que

$$H_z(x,y) = f(x)g(y) = AC\cos(k_x x)\cos(k_y y) \qquad (3.86)$$

El producto A C = H_{0mn} es el valor máximo del campo magnético longitudinal.
De (3.61) se obtiene el campo magnético transversal:

$$\vec{H}_t^{TE} = H_{0mn}\frac{-\gamma}{k_c^2}\left(k_x \sin(k_x x)\cos(k_y y)\hat{\mathbf{i}} + k_y \cos(k_x x)\sin(k_y y)\hat{\mathbf{j}}\right) \qquad (3.87)$$

De (3.60) se obtiene el campo eléctrico transversal como

$$\vec{E}_t^{TE} = -Z_H \, \mathbf{k} \times \vec{H}_t^{TE}$$

$$\vec{E}_t^{TE} = Z_w \, H_{0mn} \frac{-\gamma}{k_c^2}\left(k_y \cos(k_x x)\sin\left(k_y y\right)\hat{\mathbf{i}} - k_x \sin\left(k_x x\right)\cos\left(k_y y\right)\hat{\mathbf{j}}\right) \qquad (3.88)$$

donde, $k_{c,mn}^2 = k_x^2 + k_y^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2$ y similarmente a (3.82), las frecuencias de corte se obtienen de:

$$\omega_{c,mn} = \frac{k_{c,mn}}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$$

donde los subíndices nm se han utilizado para indicar que los autovalores dependen de m y n. Similarmente, β_{mn} y λ_{mn} se obtendrá de:

$$\beta_{mn}^2 = k_0^2 - k_{c,mn}^2 = (\mu\varepsilon)\left(\omega^2 - \omega_{c,mn}^2\right) \quad \text{y} \quad \lambda_{mn} = 2\pi/\beta_{mn}$$

En el caso de que existan varios modos propagándose simultáneamente, cada uno de ellos tendrá una velocidad de fase diferente, al igual que velocidades de grupo distintas, como se puede apreciar al sustituir en (3.83) y (3.85). Las amplitudes también serán diferentes y dependerán del dispositivo con que se inyecte la señal en la guía de ondas.

Para hallar la solución TM se seguirá el mismo procedimiento sólo que utilizando la ecuación (3.81) en lugar de la (3.64). La solución es el campo eléctrico longitudinal el cual se expresará igualmente como el producto de dos funciones en variables separadas. Al aplicar las condiciones de frontera se obtiene la solución:

$$E_z = E_{0,mn} \ \sin\left(k_x x\right)\sin\left(k_y y\right)$$

con los mismo valores anteriores de k_x y k_y.

Las componentes transversales son:

$$\vec{E}_t = \frac{\gamma E_{0,mn}}{k_{c,mn}^2}\left(k_x \cos(k_x x)\sin\left(k_y y\right)\hat{\mathbf{i}} + k_y \sin\left(k_x x\right)\cos\left(k_y y\right)\hat{\mathbf{j}}\right)$$

$$\vec{H}_t = \frac{j\omega\varepsilon E_{0,mn}}{k_{c,mn}^2}\left(-k_y \sin\left(k_x x\right)\cos\left(k_y y\right)\hat{\mathbf{i}} + k_x \cos(k_x x)\sin\left(k_y y\right)\hat{\mathbf{j}}\right)$$

Nótese que en este caso no se admiten modos de la forma (0,n) o (m,0) que harían nula la componente longitudinal. En la siguiente tabla se muestran las frecuencias de corte para varias guías de ondas rectangular prácticas.

Frecuencias de corte de guías de onda rectangulares (en GHz)					
a(in)	b(in)	fc_{10}	fc_{20}	fc_{01}	fc_{11}

21,000	10,500	0,28121	0,56243	0,56243	0,62882
18,000	9,000	0,32808	0,65617	0,65617	0,73362
15,000	7,500	0,39370	0,78740	0,78740	0,88034
9,750	4,875	0,60569	1,21139	1,21139	1,35437
6,500	3,250	0,90854	1,81708	1,81708	2,03156
4,300	2,150	1,37337	2,74675	2,74675	3,07096
2,840	1,340	2,07941	4,15881	4,40710	4,87303
1,872	0,872	3,15465	6,30931	6,77238	7,47107
1,590	0,795	3,71416	7,42832	7,42832	8,30511
1,372	0,622	4,30431	8,60862	9,49439	10,42452
1,122	0,497	5,26338	10,52676	11,88232	12,99587
0,900	0,400	6,56168	13,12336	14,76378	16,15626
0,750	0,370	7,87402	15,74803	15,96084	17,79743
0,622	0,311	9,49439	18,98878	18,98878	21,23011
0,420	0,170	14,06074	28,12148	34,73830	37,47605
0,280	0,140	21,09111	42,18223	42,18223	47,16116
0,224	0,112	26,36389	52,72778	52,72778	58,95145

Del análisis de esta tabla se concluye que el modo dominante para la guía de ondas rectangular es el TE_{10}. Adicionalmente, las frecuencias de corte para combinaciones nm distintas de cero, son iguales para el caso TE y el TM.

En la siguiente lámina se muestra la forma de los campos transversales para algunos modos TE y TM de la guía rectangular.

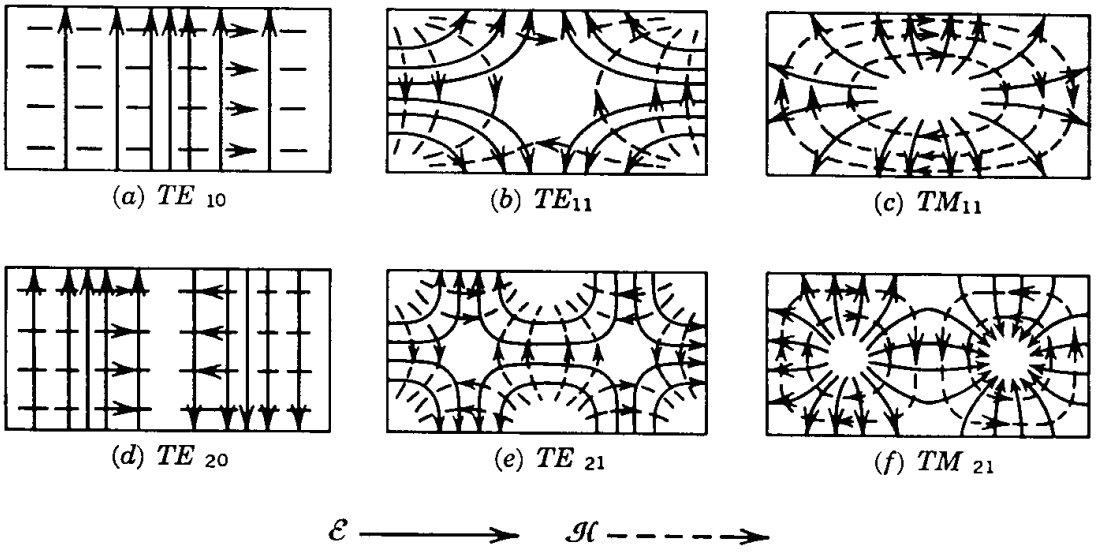


Figura 32. Campos transversales de diversos modos en guía rectangular

Figura 3.14

3.7 Guía de ondas cilíndrica.

Continuando con el mismo razonamiento de la sección 3-6, se estudiará ahora otra estructura sencilla de gran interés práctico: la guía de ondas cilíndrica.

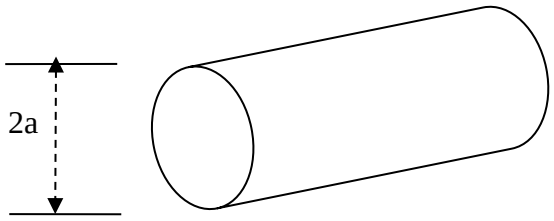


Figura 33 Guía de ondas cilíndrica

Como siempre, interesa hallar los autovalores (que definen las frecuencias de corte de los modos) así como las distribuciones de los campos correspondientes a dichos modos. Por razones de simetría al aplicar las condiciones de borde, es conveniente usar en este caso coordenadas cilíndricas **r, θ, z**, por lo que:

$$\nabla\varphi(r,\theta,z)=\frac{\partial}{\partial r}\varphi\hat{\mathbf{R}}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\varphi\hat{\Theta}+\frac{\partial}{\partial z}\varphi\hat{\mathbf{k}} \qquad (3.89)$$

Donde:

- $\hat{\mathbf{R}}$ es un vector unitario en la dirección de r
- $\hat{\Theta}$ es un vector unitario en la dirección de θ
- $\hat{\mathbf{k}}$ es un vector unitario en la dirección de z.

Las derivadas transversales son por tanto:

Gradiente: $\nabla_t\varphi=\frac{\partial}{\partial r}\varphi\hat{\mathbf{R}}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\varphi\hat{\Theta}$

Divergencia: $\nabla_t\cdot\vec{A}=\frac{1}{r}\frac{\partial(r\,a_1)}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial a_2}{\partial\theta}$

Rotor: $\nabla_t\times\vec{A}=\left(\frac{1}{r}a_2-\frac{\partial a_2}{\partial r}-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}a_1\right)\hat{\mathbf{k}}$

Laplaciano: $\nabla_t^2\varphi=\frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}\varphi+r\frac{\partial^2}{\partial r^2}\varphi+\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\varphi\right)$

3.7.1 Modos TM en guías de ondas cilíndricas.

En primer término se considerarán los modos TM para la guía circular. En este caso se tiene

$$\nabla_t^2 E_z + k_c^2 E_z = 0$$

y la condición de borde será $e_z=0$ cuando r=a.

Al sustituir la expresión del Laplaciano se obtiene:

$$\frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}E_z + r\frac{\partial^2}{\partial r^2}E_z + \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}E_z\right) + k_c^2 E_z = 0 \tag{3.90}$$

Se observa de nuevo que no hay derivadas cruzadas $\left(\partial^2/\partial r\partial\theta\right)$ y por tanto se puede aplicar el método de separación de variables. Se asume entonces $E_z=f(r)g(\theta)$:

$$\frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}fg + r\frac{\partial^2}{\partial r^2}fg + \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}fg\right) + k_c^2 fg = 0$$

$$\frac{1}{r}\left(g\frac{\partial}{\partial r}f + rg\frac{\partial^2}{\partial r^2}f + \frac{f}{r}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}g\right) + k_c^2 fg = 0$$

Dividiendo por fg y reemplazando las derivadas parciales por totales se obtiene:

$$\frac{1}{rf}\frac{d}{dr}f + \frac{1}{f}\frac{d^2}{dr^2}f + \frac{1}{r^2 g}\frac{d^2}{d\theta^2}g + k_c^2 = 0 \tag{3.91}$$

Multiplicado por r^2 y separando los términos en r y en θ se obtiene:

$$\frac{r}{f}\frac{d}{dr}f + \frac{r^2}{f}\frac{d^2}{dr^2}f + r^2 k_c^2 = -\frac{1}{g}\frac{d^2}{d\theta^2}g \tag{3.92}$$

Como esto debe cumplirse para todo f y g, entonces puede concluirse que las expresiones anteriores son iguales a una constante ν y escribir:

$$\frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{df}{dr} + \left(k_c^2 - \frac{\nu^2}{r^2}\right)f = 0 \tag{3.93}$$

$$\frac{d^2}{d\theta^2}g + \nu^2 g = 0 \tag{3.94}$$

Esta última expresión da origen a soluciones sinusoidales

$$g(\theta) = A_1 \cos \nu\theta + A_2 \sin \nu\theta \tag{3.95}$$

Como el campo debe ser periódico con el ángulo θ, entonces ν sólo puede asumir valores enteros: ν=n.

Al sustituir esta condición en la ecuación 3.93 se halla que la misma es la ecuación diferencial de Bessel, la cual tiene como soluciones generales $J_n(k_c r)$ y $Y_n(k_c r)$, las funciones de Bessel de primera y segunda clase respectivamente, orden n y argumento $k_c r$. Sin embargo, en el problema físico en consideración sólo es aceptable la primera solución pues $Y_n(0) \to -\infty$.

Entonces, la solución para E_z se puede expresar como

$$E_z(r,\theta) = (A_1 \cos n\theta + A_2 \sin n\theta) J_n(k_c r) \tag{3.96}$$

El próximo paso es aplicar la condición de borde $E_z=0$ para r=a.

Esto significa que $J_n(k_c a) = 0 = J_n(p_{nm})$, donde p_{nm} es la m-ésima raíz de la función de Bessel de orden n. Por tanto, el autovalor se obtiene como $k_{c,nm} = \frac{p_{nm}}{a}$, el cual puede sustituirse en las expresiones generales de β, λ_c y Z_E, las cuales vendrán afectadas de los correspondientes subíndices

$$\beta_{nm} = \sqrt{k_0^2 - \frac{p_{nm}^2}{a}} \tag{3.97}$$

$$\lambda_{c,nm} = \frac{2\pi}{k_{c,nm}} = \frac{2\pi a}{p_{nm}} \tag{3.98}$$

$$Z_E = \frac{\beta_{nm}}{k_0} Z_0 \tag{3.99}$$

Las restantes componentes del campo se hallan a partir de la aplicación de las fórmulas generales para los modos TM a la solución hallada para E_z.

Raíces de la función de Bessel de orden n			
n	p_{n1}	p_{n2}	p_{n3}
0	2,405	5,520	8,654
1	3,832	7,016	10,174
2	5,135	8,417	11,620

3.7.2 Modos TE en guías de ondas cilíndricas.

El procedimiento para hallar H_z es muy similar al utilizado para hallar E_z en los modos TM. Ello conduce esencialmente a las mismas soluciones generales, pero para hallar las soluciones particulares la condición de borde a aplicar es: $\left.\frac{\partial H_z}{\partial r}\right|_{r=a} = 0$

La solución general es:

$$H_z(r,\theta) = (B_1 \cos n\theta + B_2 \sin n\theta) J_n(k_c r) \tag{3.100}$$

LA aplicación de la condición de borde conduce a: $\left.\frac{\partial J_n(k_c r)}{\partial r}\right|_{r=a} = 0$ cuyas raíces se denominarán p'_{nm} y los autovalores son

$$k_{c,nm} = \frac{p'_{nm}}{a}$$

Máximos y mínimos de la función de Bessel de orden n			
n	p'_{n1}	p'_{n2}	p'_{n3}
0	3,832	7,016	10,174
1	1,841	5,331	8,536
2	3,054	6,704	9,970

Los términos $B_1 \cos n\theta$ y $B_2 \sin n\theta$ se pueden expresar como:

$$B_1 = \left(B_1^2 + B_2^2\right)^{1/2} \cos\phi \quad \text{y} \quad B_2 = \left(B_1^2 + B_2^2\right)^{1/2} \sin\phi$$

por lo que el paréntesis de la expresión de H_z se reduce a $\left(B_1^2 + B_2^2\right)^{1/2} \cos(n\theta - \phi)$

Esto quiere decir que la forma para del campo transversal para un modo "nm" dado está perfectamente definida; sólo la orientación de los campos viene determinada por la excitación. La siguiente tabla resume las frecuencias de corte de los modos TE y TM. Como puede observarse, el modo dominante es el TE_{11}, el cual tiene la frecuencia de corte más baja.

Frecuencias de corte de la guía de ondas cilíndrica*			
Modo	Raíz de	$k_c a$	f_c
TE_{11}	J'_1	1,841	1,841 f_0
TM_{01}	J_0	2,405	2,405 f_0
TE_{21}	J'_2	3,054	3,054 f_0
TE_{01},TM_{11}	J'_0,J_1	3,832	3,832 f_0
TE_{31}	J'_3	4,200	4,200 f_0
TM_{21}	J_2	5,135	5,135 f_0
TE_{41}	J'_4	5,300	5,300 f_0
TE_{12}	J'_1	5,330	5,330 f_0
TM_{02}	J_0	5,520	5,520 f_0
TM_{31}	J_3	6,379	6,379 f_0

*nota: el valor f_0 vale $c/2\pi a$.

Las ecuaciones de campo para los modos TM son

$$E_z(r,\theta,z) = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}\cos(n\theta - \phi)J_n(k_c r)e^{-\gamma z}$$

$$H_r(r,\theta,z) = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}\cos(n\theta - \phi)J_n(k_c r)\frac{n\omega\varepsilon}{r k_c^2}e^{-\gamma z}$$

$$H_\theta(r,\theta,z) = -j\frac{\omega\varepsilon}{k_c}\sqrt{A_1^2 + A_2^2}\cos(n\theta - \phi)J'_n(k_c r)e^{-\gamma z}$$

$$E_r = Z_E H_\theta \quad ; \quad E_\theta = -Z_E H_r \quad ; \quad Z_E = \frac{\gamma}{j\omega\varepsilon}$$

Asimismo, las ecuaciones de campo para los modos TE son:

$$H_z(r,\theta,z) = \sqrt{B_1^2 + B_2^2}\cos(n\theta - \phi)J_n(k_c r)e^{-\gamma z}$$

$$E_r(r,\theta,z) = \frac{\omega\mu n}{k_c^2 r}\sqrt{B_1^2 + B_2^2}\cos(n\theta - \phi)J_n(k_c r)e^{-\gamma z}$$

$$E_\theta(r,\theta,z) = \frac{j\omega\mu}{k_c}\sqrt{B_1^2 + B_2^2}\cos(n\theta - \phi)J'_n(k_c r)e^{-\gamma z}$$

$$H_r = -\frac{E_0}{Z_H} \quad ; \quad H_\theta = \frac{E_r}{Z_H} \quad ; \quad z_H = \frac{j\omega\mu}{\gamma}$$

La siguiente lámina muestra la forma de los campos transversales para algunos modos TE y TM de la guía de ondas cilíndrica.

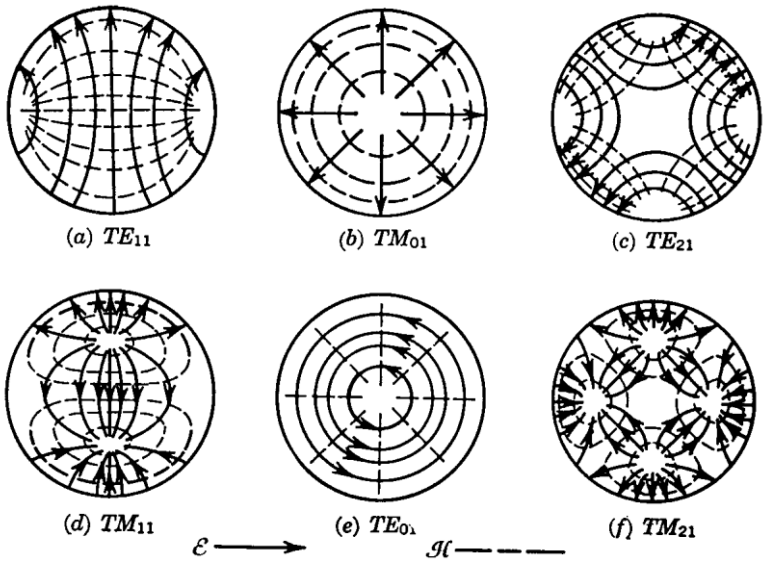


Figura 34 Campos transversales en guía de ondas cilíndrica

Figura 3.16

3.8 Impedancia de Entrada de Líneas de Transmisión.

3.8.1 Voltajes y corrientes. Patrón de ondas estacionarias.

En la sección 3-2 se introdujo el concepto de la línea de transmisión. En particular se hizo una aproximación circuital de las variables de campo, con énfasis en estructuras que soportan modos TEM como cables paralelos y cables coaxiales, obteniendo voltajes y corrientes a partir de los campos transversales. De igual manera se obtuvo una expresión para la impedancia, como el cociente de dichas tensiones y corrientes. En las secciones siguientes se estudiaron estructuras que soportan otros modos como TE y TM y se definieron impedancias de onda como cocientes de los campos eléctricos y magnéticos transversales. Ya que son los campos transversales los responsables de la transferencia efectiva de la energía desde los generadores hacia las cargas, es posible utilizar la teoría de líneas de transmisión también para estas estructuras, a pesar de no poder definir en ellas tensiones o corrientes, haciendo las siguientes sustituciones:

a) La impedancia de onda se utilizará como impedancia característica de la línea equivalente.
b) La velocidad de fase se usará como velocidad de propagación equivalente
c) En consecuencia se usará β en lugar de k, para el cálculo de la longitud de onda.

d) El voltaje equivalente será una magnitud ficticia proporcional a la magnitud del campo eléctrico transversal
e) De igual manera, la corriente equivalente en la línea de transmisión será una cantidad proporcional a la magnitud del campo magnético transversal.
f) El coeficiente de reflexión será el cociente de los campos reflejado e incidente, y corresponderá al definido para los voltajes o corrientes de la línea de transmisión.

En la ecuación (2.27) se definió al COEFICIENTE DE REFLEXIÓN, Γ, como el cociente del campo eléctrico reflejado entre el campo incidente. De la misma manera, para la línea de transmisión se define al Coeficiente de Reflexión, Γ, como el cociente del Voltaje Reflejado entre el Voltaje Incidente. Igualmente se definirá un Coeficiente de Reflexión de Corriente, Γ_i, como el cociente de la Corriente Reflejada entre la Corriente Incidente. De manera que la ecuación (3.37) se convierte en:

$$V(z) = V_0^+ e^{-\gamma z} + V_0^- e^{+\gamma z} = V^+(z)\left(1+\Gamma(z)\right) \tag{3.101}$$

donde V^+_0 es la tensión en un punto de la línea tomado como referencia (z=0), $V^+(z)$ es la tensión incidente en un punto genérico "z" y $\Gamma(z)=\rho\angle\theta$ es el Coeficiente de Reflexión en dicho punto. Si se define $\Gamma_0=\Gamma(0)$ como el Coeficiente de Reflexión en el punto de Referencia se tiene:

$$\Gamma(z) = \rho e^{j\theta(z)} = \frac{V_0^- e^{+\gamma z}}{V_0^+ e^{-\gamma z}} = \frac{V_0^-}{V_0^+}\frac{e^{+\gamma z}}{e^{-\gamma z}} = \frac{V_0^-}{V_0^+} e^{2\gamma z} = \Gamma_0 e^{2\gamma z} \tag{3.102}$$

De manera similar se pueden definir las expresiones equivalentes para la corriente:

$$I(z) = I_0^+ e^{-\gamma z} + I_0^- e^{+\gamma z} = I^+(z)\left(1+\Gamma_i(z)\right) \tag{3.103}$$

$$\Gamma_i(z) = \frac{I_0^- e^{+\gamma z}}{I_0^+ e^{-\gamma z}} = \frac{I_0^-}{I_0^+}\frac{e^{+\gamma z}}{e^{-\gamma z}} = \frac{I_0^-}{I_0^+} e^{2\gamma z} = \Gamma_{i0} e^{2\gamma z} = -\Gamma_0 e^{2\gamma z} = -\Gamma(z) \tag{3.104}$$

En (3.36) se definió la impedancia característica como el cociente de la tensión incidente entre la corriente incidente, el cual es igual al cociente de la tensión reflejada entre la corriente reflejada. La IMPEDANCIA DE ENTRADA vista en un punto de la línea de transmisión es el cociente de la tensión total entre la corriente total, de manera que:

$$Z(z)=\frac{V(z)}{I(z)}=\frac{V^{+}(z)(1+\Gamma(z))}{I^{+}(z)(1-\Gamma(z))}=Z_0\,\frac{(1+\Gamma(z))}{(1-\Gamma(z))} \qquad (3.105)$$

En esta expresión se ha representado la impedancia característica por Z_0 por ser el más usado en la práctica. A medida que se consideran puntos a lo largo del eje "z" la tensión incidente va cambiando, al igual que la reflejada y por tanto la tensión total. Para estudiar con más detalle estos cambios se considerará primero el caso simplificado de la LÍNEA SIN PÉRDIDAS, donde $\gamma=j\beta$. En este caso no hay atenuación de las ondas, sino solamente un cambio de fase. La tensión total viene dada por (3.96). Una sonda de medición colocada en el punto indicará una magnitud proporcional al voltaje total e ignorará la fase. Por lo que

$$|V(z)|=\left|V_0^{+}\,e^{-\gamma z}+V_0^{-}\,e^{+\gamma z}\right|=\left|V^{+}(z)\right|\left|(1+\Gamma(z))\right| \qquad (3.106)$$

En el caso de la línea sin pérdidas el módulo de la tensión incidente es constante y el comportamiento de la tensión total viene determinado por el Coeficiente de Reflexión:

$$|V(z)|=\left|V^{+}(z)\right|\left|(1+\Gamma(z))\right|=\left|V^{+}(z)\right|\left|\left(1+\Gamma_0\,e^{2j\beta z}\right)\right| \qquad (3.107)$$

Sucede que en la vida real el coeficiente de reflexión viene determinado por las cargas conectadas al final de la línea de transmisión, por lo cual este es el punto de referencia idóneo. Sin embargo, si todas las distancias se van a medir con referencia a la carga es conveniente hacer un cambio de variable que permite ubicar el origen de coordenadas en la carga, de manera que ahora $z=-l$

En consecuencia, la expresión de la tensión queda

$$|V(l)|=\left|V^{+}(l)\right|\left|(1+\Gamma(l))\right|=\left|V^{+}(l)\right|\left|\left(1+\Gamma_0\,e^{-2j\beta l}\right)\right| \qquad (3.108)$$

En esta expresión se ha definido $\Gamma_0=\Gamma_{carga.}$ Si ahora, se grafica la tensión a lo largo de la línea, se observa un comportamiento alternante a medida que cambia la fase del coeficiente de reflexión. Este se conoce con el nombre de PATRÓN DE ONDAS ESTACIONARIAS DE TENSIÓN.

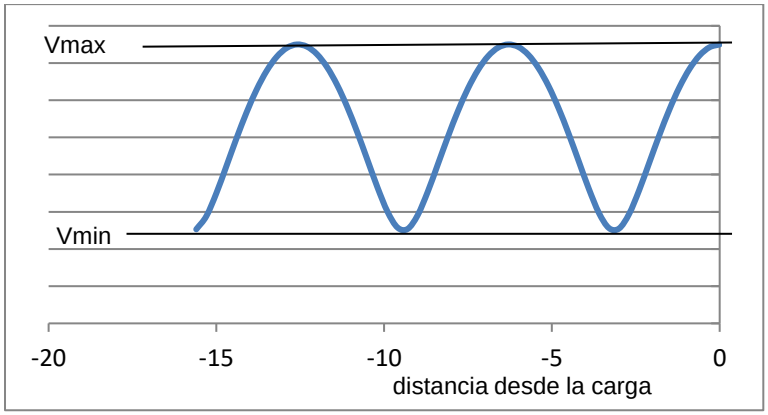


Figura 35 Patrón de ondas estacionarias

Si se normaliza la tensión, dividiéndola por la tensión incidente queda sólo el término en Γ.

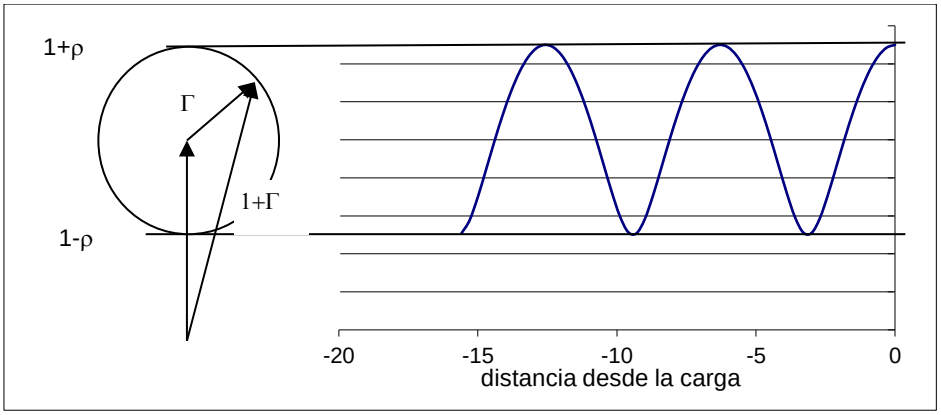


Figura 36 Diagrama de manivela

La representación mostrada a la izquierda se conoce con el nombre de diagrama de manivela. Una representación similar puede trazarse para la corriente total $I=I^{+}(1+\Gamma i)=I^{+}(1-\Gamma)$.

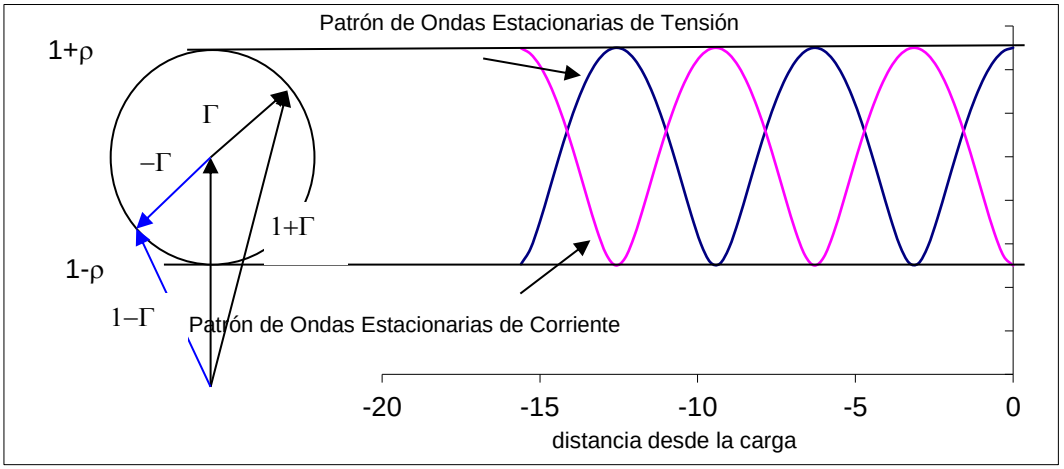


Figura 37 Patrones de onda estacionaria de voltaje y de corriente

Una magnitud muy importante para caracterizar el comportamiento de líneas de transmisión es el ROE o RELACIÓN DE ONDAS ESTACIONARIAS (SWR, Standing Wave Ratio, en inglés), el cual se define como el cociente de la máxima tensión entre la mínima del patrón de ondas estacionarias. Del gráfico anterior se tiene:

$$ROE = \frac{1+|\Gamma|}{1-|\Gamma|} = \frac{1+\rho}{1-\rho}$$

Debido a que en la línea sin pérdidas el módulo del coeficiente de reflexión no varía, el valor de ROE es constante. Sin embargo, en líneas con pérdidas se tendrá un valor de ROE diferente para cada punto de la línea. La impedancia de entrada, en función de las nuevas coordenadas vale

$$Z(l) = \frac{V(l)}{I(l)} = \frac{V^+(l)(1+\Gamma(l))}{I^+(l)(1-\Gamma(l))} = Z_0 \frac{(1+\Gamma(l))}{(1-\Gamma(l))} \tag{3.109}$$

En la carga l=0, por tanto la impedancia de carga vale:

$$Z_{carga} = Z(0) = \frac{V(0)}{I(0)} = Z_0 \frac{(1+\Gamma(0))}{(1-\Gamma(0))} = Z_0 \frac{(1+\Gamma_{carga})}{(1-\Gamma_{carga})} \tag{3.110}$$

De esta expresión es fácil obtener el coeficiente de reflexión a partir de la impedancia de la carga:

$$\Gamma_{carga} = \frac{Z_{carga} - Z_0}{Z_{carga} + Z_0} = \frac{\frac{Z_{carga}}{Z_0} - 1}{\frac{Z_{carga}}{Z_0} + 1} = \frac{z_{carga} - 1}{z_{carga} + 1} \tag{3.111}$$

La magnitud $z_{carga}=Z_{carga}/Z_0$ se conoce con el nombre de impedancia de carga normalizada y se usa comúnmente en el estudio de líneas de transmisión por cuanto es mucho más descriptiva del comportamiento de la misma que la impedancia absoluta. De hecho, es posible trabajar todos los problemas de líneas de transmisión en términos de impedancias (y admitancias) normalizadas ya que el concepto es fácilmente extrapolable al caso de guías de ondas donde no es posible definir una impedancia en términos de tensiones y corrientes.

La impedancia de entrada en cualquier punto de la línea se puede hallar sustituyendo las expresiones (3.99) y (3.107) en la (3.105)

$$z(l)=\frac{(1+\Gamma(l))}{(1-\Gamma(l))}=\frac{1+\Gamma_{carga}\,e^{-2\gamma l}}{1-\Gamma_{carga}\,e^{-2\gamma l}} \tag{3.112}$$

Por razones de simplicidad, en lo sucesivo se utilizará z_c para la impedancia de carga (normalizada) y Γ_c para el coeficiente de reflexión en la carga. Multiplicando el numerador y el denominador por $e^{\gamma l}$ se obtiene:

$$z(l)=\frac{e^{\gamma l}+\Gamma_c e^{-\gamma l}}{e^{\gamma l}-\Gamma_c e^{-\gamma l}}=\frac{e^{\gamma l}+\dfrac{z_c-1}{z_c+1}e^{-\gamma l}}{e^{\gamma l}-\dfrac{z_c-1}{z_c+1}e^{-\gamma l}} \tag{3.113}$$

$$z(l)=\frac{(z_c+1)e^{\gamma l}+(z_c-1)e^{-\gamma l}}{(z_c+1)e^{\gamma l}-(z_c-1)e^{-\gamma l}}=\frac{z_c\left(e^{\gamma l}+e^{-\gamma l}\right)+1\left(e^{\gamma l}-e^{-\gamma l}\right)}{z_c\left(e^{\gamma l}-e^{-\gamma l}\right)+1\left(e^{\gamma l}+e^{-\gamma l}\right)} \tag{3.114}$$

$$z(l)=\frac{z_c+\dfrac{\left(e^{\gamma l}-e^{-\gamma l}\right)}{\left(e^{\gamma l}+e^{-\gamma l}\right)}}{z_c\dfrac{\left(e^{\gamma l}-e^{-\gamma l}\right)}{\left(e^{\gamma l}+e^{-\gamma l}\right)}+1}=\frac{z_c+\tanh(\gamma l)}{z_c\tanh(\gamma l)+1} \tag{3.115}$$

Esta expresión es general. Para el caso particular de la línea sin pérdidas $\alpha=0$ y por lo tanto $\gamma=j\beta$. Entonces se tiene que $\tanh(j\beta l)=j\tan(\beta l)$. Entonces, la impedancia de entrada de la línea sin pérdidas es la familiar fórmula:

$$z(l)=\frac{z_c+j\tan(\beta l)}{1+j\,z_c\tan(\beta l)} \tag{3.116}$$

Similarmente puede hallarse una expresión para la admitancia, ya sea haciendo una deducción similar o simplemente tomando los inversos en esta última expresión.

$$y(l)=\frac{y_c+j\tan(\beta l)}{1+j\,y_c\tan(\beta l)} \tag{3.117}$$

Para entender mejor el significado de las expresiones anteriores se estudiarán varios casos particulares de impedancia de carga

3.8.2 Carga Acoplada

En este caso $Z_{carga} = Z_0$ por lo que $\Gamma_{carga} = 0$ y el coeficiente de reflexión en cualquier punto a

lo largo de la línea es cero. Por esta razón la tensión normalizada es constante, e igual a 1.

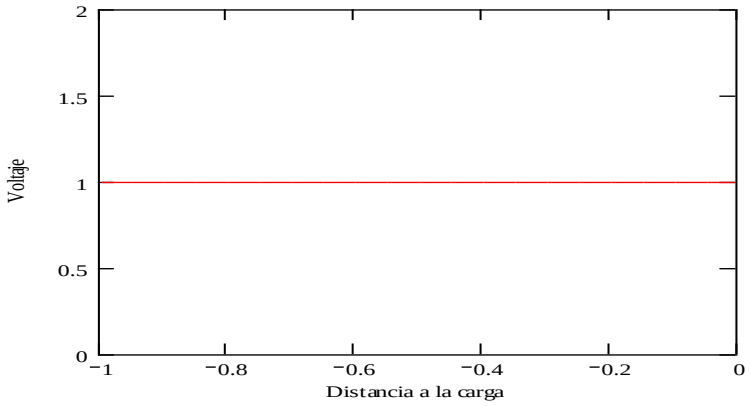


Figura 38

3.8.3 Cortocircuito

La impedancia de carga vale cero, por lo que Γ_{carga}=-1. El coeficiente de reflexión a lo largo de la línea vale $\Gamma = e^{j(\pi - 2\beta l)}$. La tensión vale $|1+\Gamma| = 2 \cdot |\sin(\beta l)|$

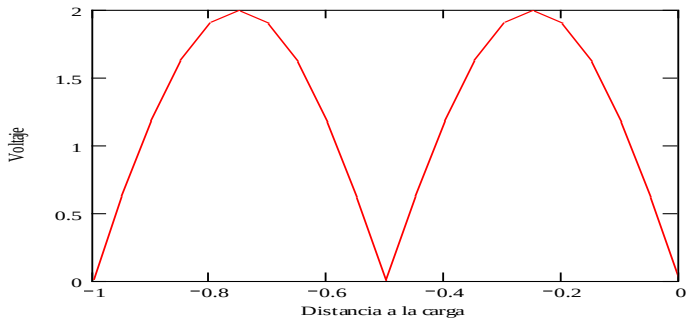


Figura 39

Como se ve, los mínimos del patrón de ondas estacionarias están separados en λ/2. Esto sucede no sólo en esta condición particular sino en todos los puntos del patrón pues la tensión normalizada, |1+Γ|, se repite cada vez que el argumento de Γ se incrementa en 2π radianes, es decir, cuando la longitud es tal que 2 β *l* = 2 π.

$$e^{j\theta - 2(j\beta\lambda/2)} = e^{j\theta - j2\frac{2\pi}{\lambda}\frac{\lambda}{2}} = e^{j\theta}.e^{-j2\pi} = e^{j\theta}$$

3.8.4 Circuito Abierto

Aquí la impedancia tiende a infinito, y el coeficiente de reflexión en la carga a +1. El coeficiente de reflexión a lo largo de la línea vale $\Gamma = e^{-j(2\beta l)}$. La tensión vale

$$|1+\Gamma| = 2 \cdot |\cos(\beta\, l)|$$

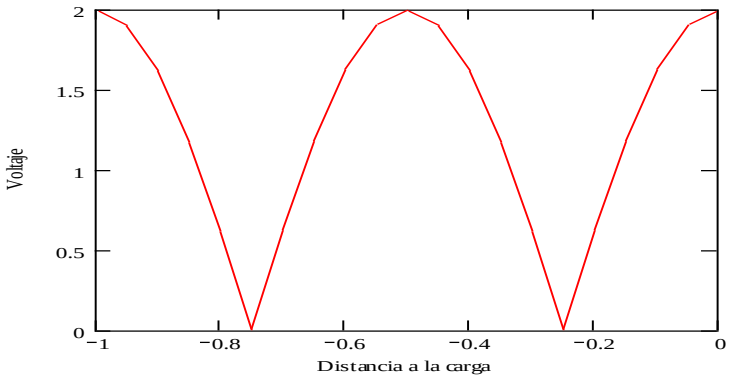


Figura 40

De aquí se observa que al cabo de λ/4 se vuelve a reproducir la condición de cortocircuito, pues es recíproca de la de circuito abierto. Las líneas terminadas en cortocircuito o circuito abierto presentan una impedancia de entrada que es reactiva pura; de esta forma pueden simularse capacitancias e inductancias a frecuencias de VHF hasta microondas. A este tipo de líneas se les denomina **stubs**.

3.8.5 Carga resistiva pura

Cuando la carga es resistiva pura, pero diferente de 1, el patrón de ondas estacionario empieza en un máximo si la carga es mayor que 1. Similarmente, la tensión en la carga es mínima si la misma es menor que 1.

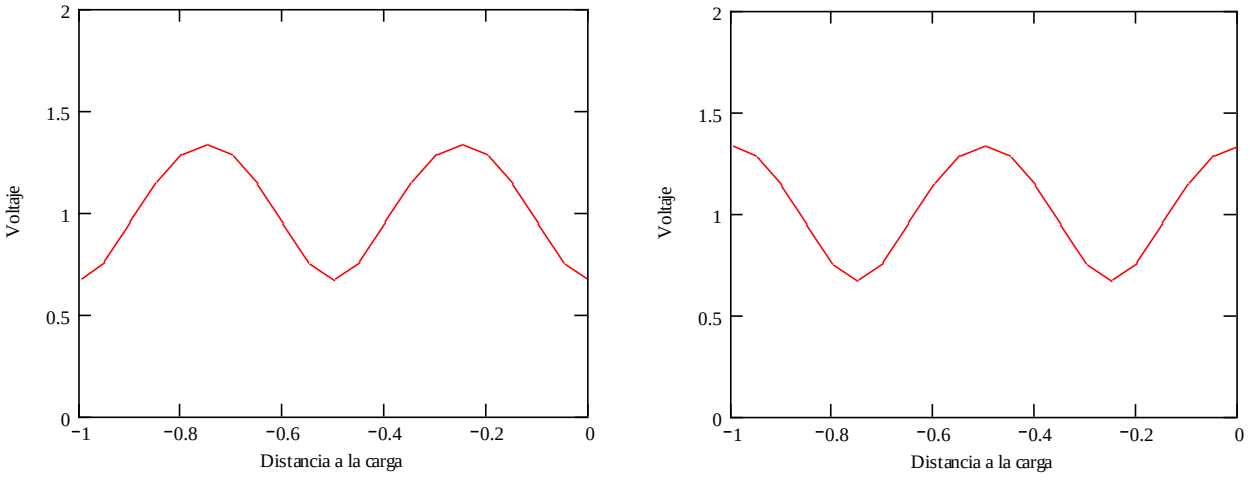


Figura 41

3.8.6 Impedancia de un mínimo y un máximo.

Si se aplica la relación (3.100) a un máximo se tiene:

$$z_{\max} = \frac{1+\Gamma_{\max}}{1-\Gamma_{\max}} = \frac{1+\rho}{1-\rho} = ROE \tag{3.118}$$

Por otra parte, en un mínimo se tiene:

$$z_{\min} = \frac{1+\Gamma_{\min}}{1-\Gamma_{\min}} = \frac{1-\rho}{1+\rho} = \frac{1}{ROE} \tag{3.119}$$

3.8.7 El Transformador de λ/4.

El caso especial de una línea de transmisión de longitud λ/4 es de mucha utilidad en sistemas de comunicaciones. La impedancia de entrada normalizada de esa línea vale:

$$z = \frac{z_c + j\tan(\beta l)}{1 + j\, z_c \tan(\beta l)} = \frac{z_c + j\tan\left(\frac{\pi}{2}\right)}{1 + j\, z_c \tan\left(\frac{\pi}{2}\right)} \to \frac{1}{z_c} \tag{3.120}$$

Con una expresión similar para la admitancia. Si ahora se consideran las impedancias no normalizadas se tiene:

$$Z = z\, Z_0 = \frac{1}{z_c} Z_0 = \frac{Z_0}{Z_c / Z_0} = \frac{Z_0^2}{Z_c} \tag{3.121}$$

Esto halla aplicaciones en algunos sistemas de acoplamiento como se discute más adelante.

3.8.8 Interconexión de líneas.

Las líneas de transmisión pueden ser conectadas en serie, en paralelo o en cascada. En los dos primeros casos, la impedancia total será la combinación serie o paralelo de las impedancias de entrada de cada una de las líneas individuales. La impedancia obtenida será a su vez la carga conectada en el extremo de la línea siguiente y así sucesivamente.

Ejemplo:

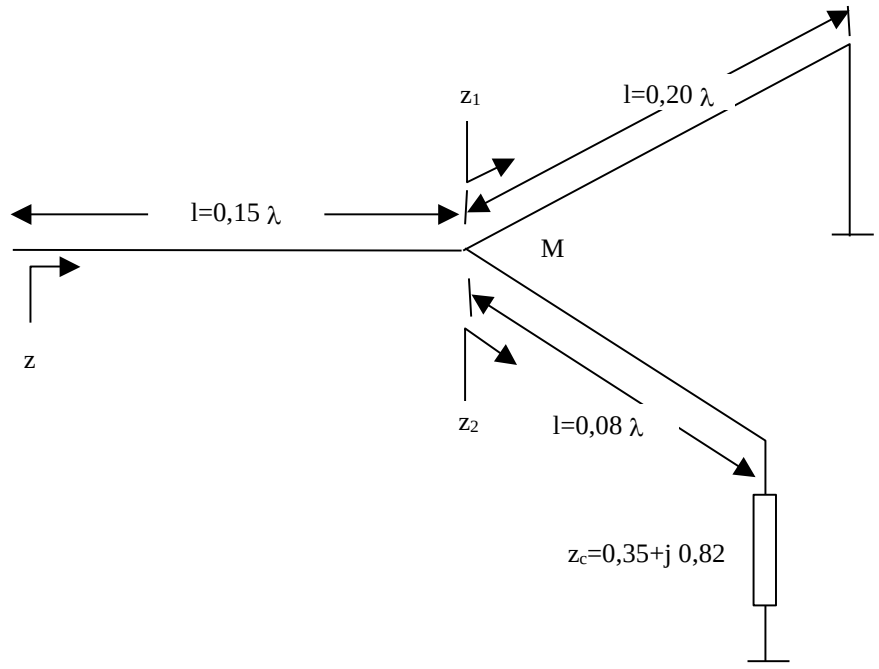


Figura 42 Interconexión de líneas

En el ejemplo anterior las líneas z_1 y z_2 se combinan en paralelo en el punto M. Los valores son, respectivamente, z_1=j 3,078 y z_2=1,346 + j 2,023. El valor obtenido de la combinación es 0,458 + j 1,342 y constituye a su vez la impedancia de carga de la línea de 0,15 λ. Finalmente el valor de la impedancia de entrada del sistema resulta ser de 1,190 – j 2,323.

Otro ejemplo de la combinación de líneas se aprecia en el diplexer, el cual es un arreglo que permite la conexión simultánea de dos transmisores a una sola antena.

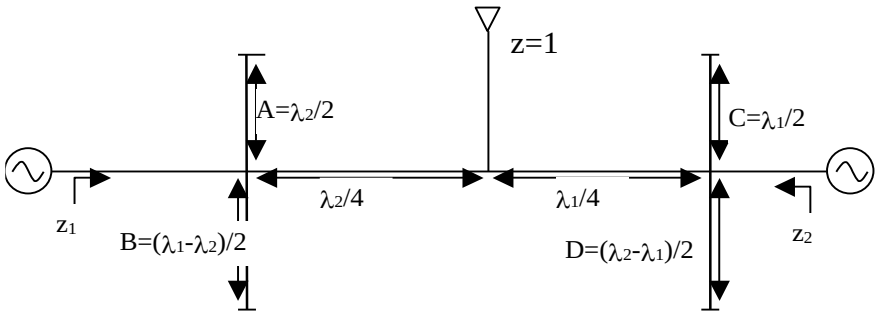


Figura 43 Diplexer

A la frecuencia f_1 el cortocircuito de la línea C, aparece en paralelo con el generador 2. Esta impedancia cero se refleja como un circuito abierto a la base de la antena y, en consecuencia no modifica la impedancia de la antena vista desde el generador 1. De manera similar, a la frecuencia f_2 el cortocircuito A aísla al generador 1 del circuito de antena, por lo que el generador ve simplemente una carga acoplada.

3.8.9 Acoplamiento con transformador λ/4.

En una expresión anterior se demostró que la impedancia normalizada observada a la entrada de una línea de longitud λ/4 es el inverso de la impedancia de carga. Si la impedancia de carga fuese resistiva pura, entonces a través de una escogencia apropiada de la impedancia característica de la línea sería posible el acoplamiento de la carga a una línea de transmisión dada. Considérese el siguiente sistema:

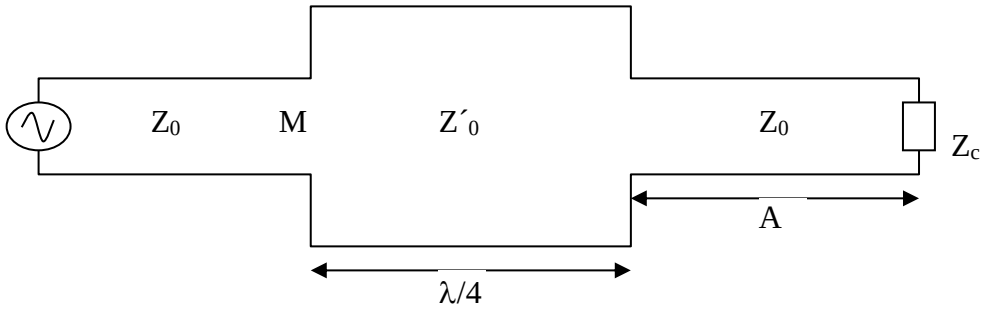


Figura 44 Transformador λ cuarto

Se desea calcular A y Z'_0 en función de Z_c y Z_0 para que el sistema esté acoplado. De la definición de acoplamiento se concluye que si la impedancia Z_M en el punto M es igual a Z_0 el sistema estará acoplado. Si se escoge la distancia A de manera que la impedancia Z'_1 a la entrada de la línea Z_0 sea resistiva pura se cumplirá que:

$$Z_M = \frac{\frac{Z'_1}{Z'_0} + j\tan\left(\frac{2\pi}{\lambda}\frac{\lambda}{4}\right)}{1 + j\frac{Z'_1}{Z'_0}\tan\left(\frac{2\pi}{\lambda}\frac{\lambda}{4}\right)} Z'_0 = \frac{1}{\frac{Z'_1}{Z'_0}} Z'_0 = Z_0$$

De aquí se obtiene: $Z'_0 = \sqrt{Z_0\, Z'_l}$

Si el valor de A escogido es tal que $Z'_1 = Z_{max} = ROE\ Z_0$, entonces: $Z'_0 = \sqrt{ROE}\, Z_0$ en tanto que, si es un mínimo, entonces: $Z'_0 = \frac{Z_0}{\sqrt{ROE}}$

El valor de A se puede calcular en base a que en el máximo el valor del ángulo del coeficiente de reflexión es 0º (en el mínimo es 180º). Entonces, si se calcula el valor de Γcarga se halla rápidamente el resultado:

$$\Gamma_{\text{carga}} = \frac{z_{\text{carga}} - 1}{z_{\text{carga}} + 1}$$

$$\theta_{\text{carga}} = \tan^{-1} \frac{2\,\text{y}}{x^2 + y^2 - 1}$$

En consecuencia,

$$A = \frac{\theta_c}{2\,\beta} \text{ para un máximo}$$

$$A = \frac{(\pi + \theta_c)}{2\,\beta} \text{ para un mínimo}$$

3.8.10 Acoplamiento con un stub.

Considérese el siguiente sistema

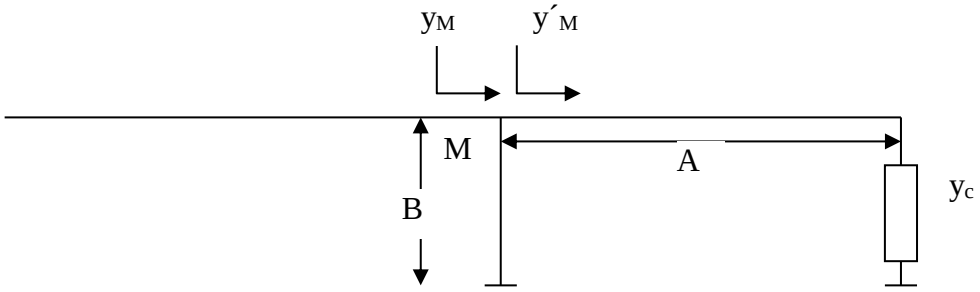


Figura 45 Acoplamiento con stub simple

Se desea hallar A y B, en función de y_c=g+jb para que el sistema esté acoplado.

De la definición de acoplamiento se tiene que

$$z_M = 1 + j\,0 \Rightarrow y_M = \frac{1}{z_M} = 1 + j\,0$$

El stub está en paralelo con la línea que va a la carga, por tanto,

$$y_M = y_s + y'_M \qquad \text{y} \qquad y_s = -j\,b_s$$

Como el stub sólo introduce variaciones en la parte imaginaria, el valor de A debe ser tal que la parte real de y'_M sea igual a 1, en tanto que la parte imaginaria será compensada por el stub.

$$y'_M = 1 + j\,b_S = \frac{y_c + j\tan\beta A}{1 + y_c\ j\tan\beta A} =$$

$$= \frac{(g + jb) + j\tan\beta A}{1 + (g + jb)\,j\tan\beta A} = \frac{g + j\,(\text{b} + \tan\beta A)}{(1 - b\tan\beta A) + j\,g\tan\beta A}$$

Al igualar a 1+j b_s se obtienen dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$1 = \frac{g - b\ g\tan\beta A + b\ g\tan\beta A + g\tan^2\beta A}{(1 - b\tan\beta A)^2 + g^2\tan^2\beta A}$$

$$b_s = \frac{(b + \tan\beta A)(1 - b\tan\beta A) - g^2\tan\beta A}{(1 - b\tan\beta A)^2 + g^2\tan^2\beta A}$$

La primera expresión es una ecuación de segundo grado que tiene como soluciones:

$$\tan\beta A = \frac{2\,b \pm \sqrt{4\,b^2 - 4(1-g)\left(b^2 + g^2 - g\right)}}{2\left(b^2 + g^2 - g\right)}$$

lo cual, eventualmente se reduce a

$$\tan\beta A = \frac{b \pm \sqrt{g}\sqrt{b^2 + g^2 - 2\,g + 1}}{b^2 + g^2 - g}$$

De esta expresión pueden hallarse los valores A, los cuales se pueden sustituir en la segunda expresión para hallar $b_{s.,}$ y eventualmente B.

En el caso particular de que la carga fuese resistiva pura las expresiones se reducen a

$$\tan\beta A = \frac{1}{\pm\sqrt{g}}$$

y

$$b_s = \frac{1-g}{\sqrt{g}} = \pm\frac{1-ROE}{\sqrt{ROE}}$$

Esta última expresión es aplicable también a cargas generales ya que el ROE es independiente de la posición. El signo deberá escogerse de acuerdo a la solución de A seleccionada.

Ejemplo: Asumiendo un admitancia de carga y_c= 0,34 – j 0,72, halle los dos soluciones de acoplamiento.

Solución 1. ROE= 4,588 tan βA= -0,512 A=0,4247 λ b_s= 1,675 B=0,086 λ

Solución 2. ROE= 4,588 tan βA= -4,386 A=0,2857 λ b_s= -1,675 B=0,414 λ

Vamos a mostrar gráficamente el patrón de onda estacionarias correspondientes a este problema y donde quedan las soluciones. Adicionalmente mostraremos algunos puntos interesantes de las soluciones.

El coeficiente de reflexión de tensión en la carga es:

$$\Gamma = \frac{1-yc}{1+yc} = 0{,}1582 + j0{,}6223 = 0{,}6421\angle 75{,}7393°$$

Entonces, el máximo del patrón de ondas se halla a 75,7393° del plano de la carga, lo cual en longitudes de onda es: 0,1052λ y el mínimo se halla 0,25 λ más lejos: 0,3553 λ

El valor de $ROE = \frac{1+0,6421}{1-0,6421} = 4.5882$ es también el valor de admitancia en el mínimo de tensión.

Si se sustituye este valor en la fórmula simplificada anterior se tiene un valor de

$$\tan \beta\delta = \frac{1}{\sqrt{4.5882}} = 0,4669$$

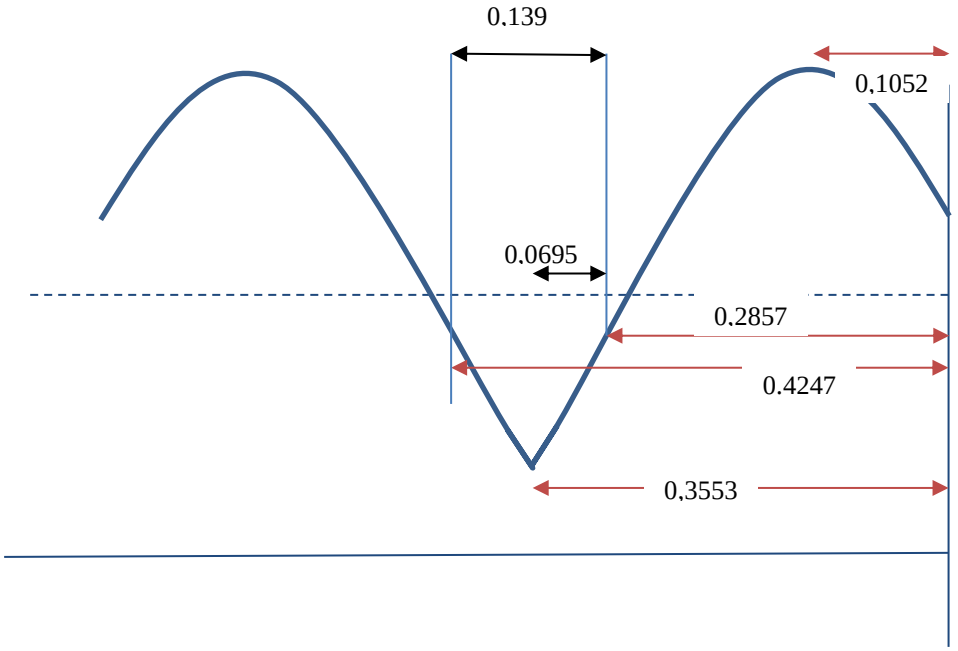
Es decir, que la distancia, δ, a partir del mínimo donde se puede lograr el acoplamiento es:

$$\delta = \frac{25,0257}{360} = 0,0695\ \lambda$$

Si este valor se substituye en el gráfico se obtiene las mismas dos soluciones que se habían obtenido antes por la solución directa de la ecuación de segundo grado:

A1= 0,3552+0,0695= 0,4247 λ

A2=0,3552-0,0695=0,2857 λ



3.8.11 Acoplamiento con dos stubs.

Considérese el siguiente sistema

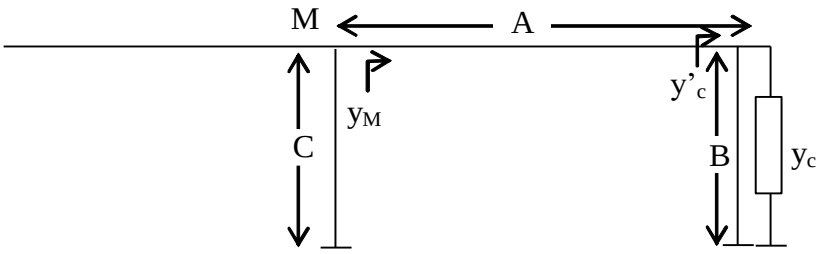


Figura 46 Acoplamiento con stub doble

Se desea hallar B y C, en función de $y_c=g+jb$ para que el sistema esté acoplado.

De la definición de acoplamiento se tiene que y_M debe ser de la forma 1-j b_C, siendo b_C la subceptancia del stub "C". Este valor se obtiene de la traslación de la admitancia y'_B la cual la combinación de la admitancia de carga con el stub "B". Vamos a denominar b' a la subceptancia de la combinación, de manera que $y'_C=g+j\,b'$. De igual manera se denominará "a" a la tan(βA), por lo que se podrá escribir:

$$y_M = \frac{y'_C + j\,a}{1 + j\,a\,y'_C} = \frac{g + j(b'+a)}{1 + j\,a(g + jb')} = 1 - j\,b_C$$

En esta expresión las incógnitas son b' y b_C y se pueden escribir dos ecuaciones separando las partes real e imaginaria respectivamente.

$$\frac{g + j(b'+a)}{1 - ab' + jag}\,\frac{1 - ab' - jag}{1 - ab' - jag} = \frac{(g - gab' + ag(b'+a))}{(1-ab')^2 + (ag)^2} + j\,\frac{((b'+a)(1-ab') - ag^2)}{(1-ab')^2 + (ag)^2} = 1 - jb_C$$

La igualación de las partes reales permite obtener una ecuación de segundo grado de donde se obtiene b' y este valor se sustituye en la segunda ecuación para hallar b_C.

$$(g - gab' + ag(b'+a)) = (1-ab')^2 + (ag)^2$$

$$g - gab' + agb' + a^2 g = 1 + a^2 b'^2 - 2ab' + (ag)^2$$

$$a^2 b'^2 - 2ab' + a^2 g^2 + 1 - g - a^2 g = 0$$

La solución es:

$$b' = \frac{1 \pm \sqrt{g}\sqrt{1 + a^2(1-g)}}{a}$$

Con este valor se halla la susceptancia del stub "B" : $b_B = b' - b$

Al analizar este resultado se puede observar que existen dos soluciones debido al doble signo del radical. También que es posible que no exista solución, si el argumento del radical se hace negativo, lo cual depende del valor de g: Si g es menor que la unidad siempre habrá solución.

Sin embargo, cuando g es mayor que 1 hay una separación de los stubs más allá de la cual no hay solución. El valor límite de separación es:

$$A = \frac{\lambda}{2\pi} \tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{g-1}}\right)$$

Para ilustrar esta aplicación considérese el siguiente problema: y_C=0,37 + j 0,8 y los stubs están separados en 0,234 λ .

El valor de a es: tan (2 π 0,234) = 10,116 . Con este valor se obtienen las siguientes soluciones:

b_C	b_B
1,414	-0,215
-1,216	-1,188

Por otra parte, si la carga valiera y_C=2 +j 0,5, solamente se podrá obtener una solución si los stubs están separados en menos de 0,125 λ .

3.8.12 Acoplamiento con Red PI.

A frecuencias bajas se utilizan parámetros concentrados en lugar de stubs debido a que las longitudes de los mismos tendrían valores imprácticos. Un sistema de acoplamiento muy popular es la denominada red PI, que consiste en una bobina en serie entre la entrada y la salida y un par de condensadores como se indica en la siguiente figura.

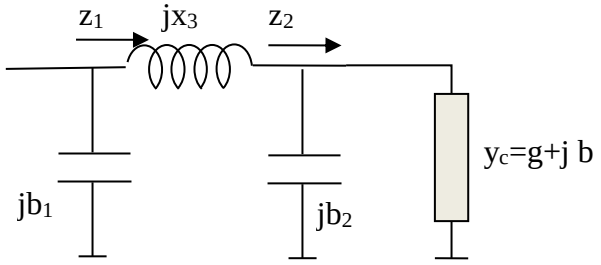


Figura 47 Acoplador PI

La admitancia total del lado dela carga es $y_2=y_c+j\ b_2$. La impedancia z_2 es el inverso y queda en serie con la reactancia j x_3 para producir la impedancia z_1.

$$z_2 = \frac{1}{g + j\,(b + b_2)}$$

Vamos a definir $\beta = b + b_2$ y $\gamma = g^2 + \beta^2$

Entonces:

$$z_2 = \frac{g - j\,\beta}{\gamma}$$

$$z_1 = \frac{g + j\,(\gamma\, x_3 - \beta)}{\gamma}$$

La admitancia y_1 vale

$$y_1 = \frac{\gamma(g - j\,(\gamma\, x_3 - \beta))}{g^2 + (\gamma\, x_3 - \beta)^2}$$

Esta admitancia debe ser de la forma 1 – j b_1 para que al sumarla a la susceptancia de entrada se cancele la parte imaginaria. De aquí se obtiene

$$\gamma\, g = g^2 + (\gamma\, x_3 - \beta)^2$$

De esta expresión se obtiene finalmente

$$\beta = \frac{1 \pm \sqrt{g - g^2 x_3^2}}{x_3}$$

Para que exista solución, el término bajo el radical debe ser positivo. Eso establece una condición para x_3:

$$x_3 \leq \frac{1}{\sqrt{g}}$$

En los circuitos prácticos la reactancia serie se mantiene fija mientras que los capacitores se varían de manera continua. Sin embargo, para cumplir con la condición anterior se acostumbra variar esta reactancia por pasos utilizando una bobina con varias derivaciones y un conmutador.

Una vez calculada β se calculan las susceptancias b_2 y b_1:

$$b_2 = \beta - b$$

$$b_1 = \frac{(\gamma\, x_3 - \beta)}{g}$$

Ejemplo: Si yc=1.323 – j 0.588 y $x_3 = 0.5$ se tiene que el término subradical vale 0.885. Se tienen dos soluciones positivas para β.

Las susceptancias respectivas son:

β	b_1	b_2
3.882	3.422	4.47
0.118	0.578	0.706

Si se escogiera x_3>0.87, el problema no tiene solución como puede ser comprobado fácilmente.

Por otra parte, si alguna de las susceptancias resulta negativa, eso significa que deberá sustituirse el capacitor respectivo por una bobina que produzca el valor deseado.

3.9 Potencia incidente y Potencia Reflejada

La onda incidente lleva asociada una cierta cantidad de potencia la cual, en el caso de una carga acoplada se disiparía totalmente en ella y su valor sería:

$$P^+ = V^+ \cdot I^{+*} = V^+ \cdot \left(\frac{V^+}{Z_0}\right)^* = \frac{V^+ \cdot V^{+*}}{Z_0} = \frac{\left|V^+\right|^2}{Z_0}$$

Similarmente, la onda reflejada lleva asociada una cierta cantidad de potencia, P^-, cuyo valor es:

$$P^- = \frac{\left|V^-\right|^2}{Z_0} = \frac{\left|\rho\, V^+\right|^2}{Z_0} = \rho^2 \frac{\left|V^+\right|^2}{Z_0} = \rho^2 P^+$$

El término ρ^2 se denomina coeficiente de reflexión de potencia. Para líneas terminadas en cargas cualesquiera existirán V^+ y V^-, y la potencia transferida a la carga será la diferencia de la potencia incidente y la reflejada:

$$P_t = P^+ - P^- = \left(1 - \rho^2\right)P^+$$

En la práctica se prefiere expresar la potencia en dBm en lugar de Watts y por tanto las expresiones anteriores quedan como:

$$P^+\big|_{dBm} = 10\,\log\left(P^+/1mW\right)\ ;\ \ P^-\big|_{dBm} = 10\,\log\left(P^-/1mW\right)$$

$$P^-\big|_{dBm} = P^+{}_{dBm} - RET\big|$$

$$P_t\big|_{dBm} = P^+\big|_{dBm} - REFL$$

Aquí se han definido RET=10 log ($1/\rho^2$) : **<u>Pérdida de retorno</u>** y REFL= - 10 log ($1-\rho^2$) : **<u>Pérdida de reflexión</u>**. Los términos RET y REFL no representan ninguna pérdida real en el sistema y sólo relacionan las potencias P^+, P^- y P_t.

3.10 Líneas con pérdidas.

En la solución general de las ecuaciones para la línea de transmisión con excitación sinusoidal se halló:

$$V = V_c^+\ e^{-\gamma l} + V_c^-\ e^{\gamma l}$$
$$I = I_c^+\ e^{-\gamma l} - I_c\ e^{\gamma l}$$

Donde $\gamma=\alpha + j\,\beta$. Si se dibujan las tensiones incidente, reflejada y total a lo largo de la línea en estas condiciones se tiene

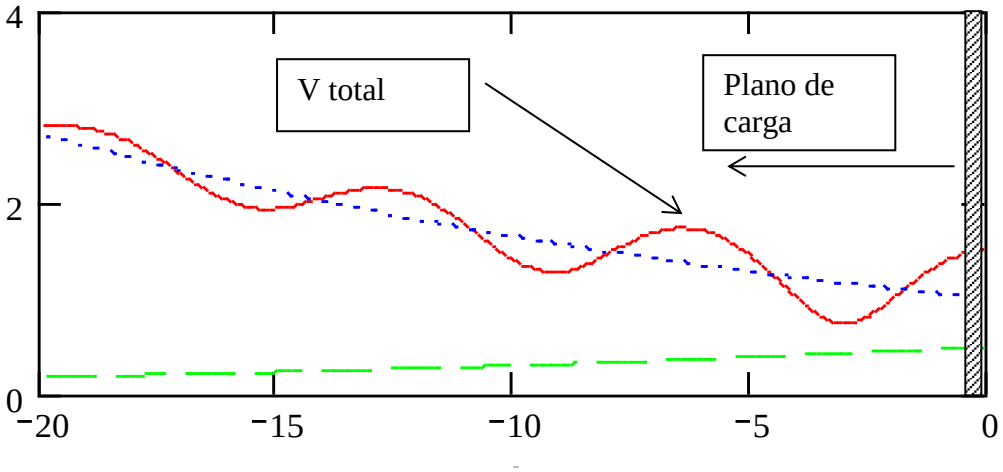


Figura 48 Patrón de onda estacionaria de la línea con pérdidas

La gráfica de la tensión normalizada, $V_{norm}=|1+\Gamma|$ queda como sigue:

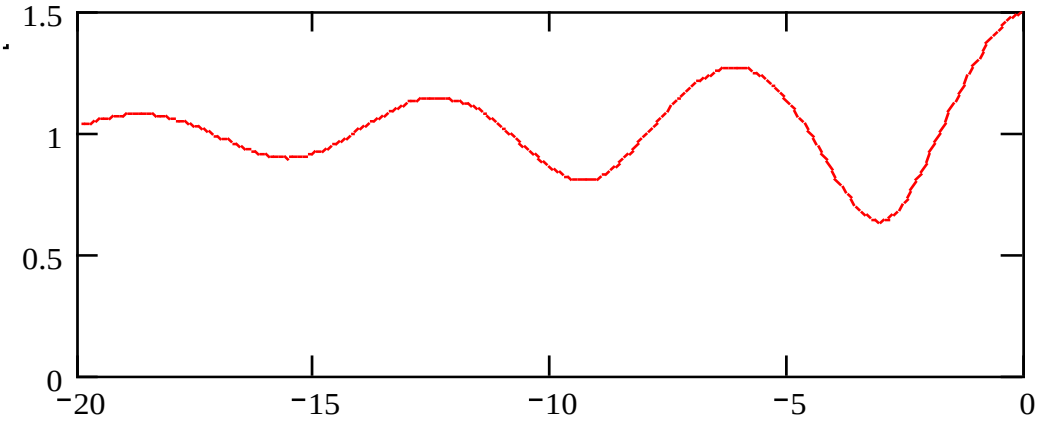


Figura 49 Patrón normalizado

De esta manera, el patrón de ondas estacionarias tiene la forma indicada en la figura, con valores máximo y mínimos cambiantes a lo largo de la línea.

El coeficiente de reflexión es:

$$\Gamma = \frac{V^-}{V^+} = \frac{V_c^-\ e^{-\gamma l}}{V_c^+\ e^{\gamma l}} = \Gamma_c\ e^{-2\gamma l}$$

Por lo tanto, el valor de ρ va disminuyendo a medida que se consideran puntos más alejados de la carga, a la rata $e^{2\alpha l}$. De esta forma, las pérdidas de retorno, de reflexión y el ROE varían a lo largo de la línea con pérdidas, a diferencia del caso sin pérdidas donde son constantes.

Si se observa la trayectoria que describe el extremo del radio-vector de Γ, se tiene que la misma no es una circunferencia sino una espiral que se acerca al centro a medida que se observan puntos más alejados de la carga.

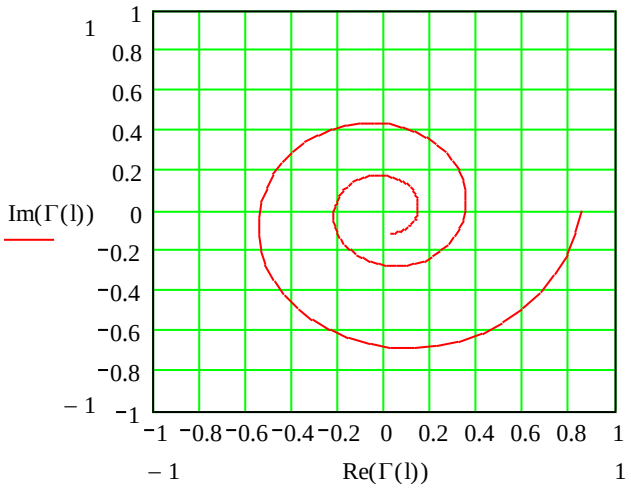


Figura 50

En la mayoría de los casos prácticos no hace falta dibujar la espiral pues sólo interesan los puntos extremos de la trayectoria. El coeficiente de reflexión a la entrada se puede hallar considerando primero el punto para la línea sin pérdidas, y corrigiendo luego el módulo en la cantidad $e^{-2\alpha l}$. Como el valor de αl generalmente viene expresado en dB será necesario efectuar la conversión primero o usar.

$$e^{-2\alpha l\,(neper)} = e^{-2\alpha l\,(dB)0{,}11513} = 10^{-\alpha l\,(dB)/10}$$

3.11 Métodos gráficos para el estudio de las líneas de transmisión

Adicionalmente a los métodos matemáticos también se han desarrollado métodos gráficos para el estudio de las líneas de transmisión que, si bien no tienen la misma precisión de los primeros, proporcionan una visión bastante clara de los fenómenos que ocurren en las mismas. Adicionalmente permiten ahorros de tiempo sobre todo en el caso de estructuras complicadas como en el caso de los acoplamientos multistub. De los métodos existentes se estudiarán aquí solamente aquellos que hacen uso del "Diagrama Bicircular o Diagrama Cartesiano" y de la "Carta de Smith".

> *"La "Carta de Smith" fue inventada por Phillip Smith en 1939 mientras trabajaba para RCA, aunque el ingeniero japonés Kurakawa inventó un dispositivo similar un año antes. El motivo que tenía Smith para hacer este diagrama era representar gráficamente las*

relaciones matemáticas que se podían obtener con una regla de cálculo.

La carta de Smith fue desarrollada en los Laboratorios Bell. Debido a los problemas que tenía para calcular la adaptación de las antenas a causa de su gran tamaño, Smith decidió crear una carta para simplificar el trabajo. De la ecuación de Fleming, y en un esfuerzo por simplificar la solución del problema de la línea de transmisión, desarrolló su primera solución gráfica en la forma de un diagrama rectangular.

Phillip persistió en su trabajo y el diagrama fue desarrollado gradualmente con una serie de pasos. La primera carta rectangular fue limitada por la gama de datos que podría acomodar. En 1936 desarrolló un nuevo diagrama que eliminó la mayoría de las dificultades. La nueva carta era una forma coordinada polar especial en la cual todos los valores de los componentes de la impedancia podrían ser acomodados.

Las curvas del cociente constante de la onda de la situación, de la atenuación constante y del coeficiente de reflexión constante eran todos círculos coaxiales con el centro del diagrama. Las escalas para estos valores no eran lineales, pero eran satisfactorias. Con el tiempo la gente que trabaja en este ámbito propuso las cartas para solucionar problemas de las líneas de transmisión." [Tomado de Wikipedia: http://es.wikipedia.org/wiki/Carta_de_Smith]

3.11.1 El Diagrama Bicircular

El Diagrama Bicircular es una representación del plano de impedancias normalizadas (o admitancias normalizadas) donde están indicados los lugares geométricos que corresponden a valores constantes del módulo o del ángulo del coeficiente de reflexión de tensión (o de corriente).

La ecuación de partida es:

$$z = \frac{1+\Gamma}{1-\Gamma}$$

Debido a que tanto z como Γ son números complejos, la expresión anterior representa una transformación del plano Γ en el plano z. Una propiedad fundamental de las transformaciones conformes es que los círculos (y las circunferencias) se transforman en otros círculos (las líneas rectas se consideran circunferencias de radio infinito a estos efectos). Adicionalmente, los ángulos entre líneas en un plano se conservan en la transformación. Por lo tanto, si dos líneas se interceptan en ángulo recto en un plano, esta cuadratura se mantendrá en el plano transformado.

En el plano Γ el lugar geométrico correspondiente a un valor constante del módulo del coeficiente de reflexión es una circunferencia centrada en el origen. Este lugar geométrico corresponde por tanto a una circunferencia en el plano z. Tales figuras tienen un centro y un radio dados por:

$$\text{Centro} = \left(\frac{1+\rho^2}{1-\rho^2}, 0 \right) \quad ; \quad \text{radio} = \frac{2\,\rho}{1-\rho^2}$$

El lugar geométrico correspondiente a valores constantes del ángulo del coeficiente de reflexión son líneas radiales en el plano Γ. Son por tanto perpendiculares a las líneas de módulo constante. En consecuencia, estas líneas se transformarán en circunferencias perpendiculares a las descritas anteriormente. En la figura se muestra un diagrama cartesiano tal como se imprime comercialmente, y en ella se puede apreciar que las circunferencias de módulo de coeficiente de reflexión han sido rotuladas en términos de la Pérdida de Retorno, en tanto que las correspondientes al ángulo aparecen rotuladas en términos de distancias al generador en longitudes de onda.

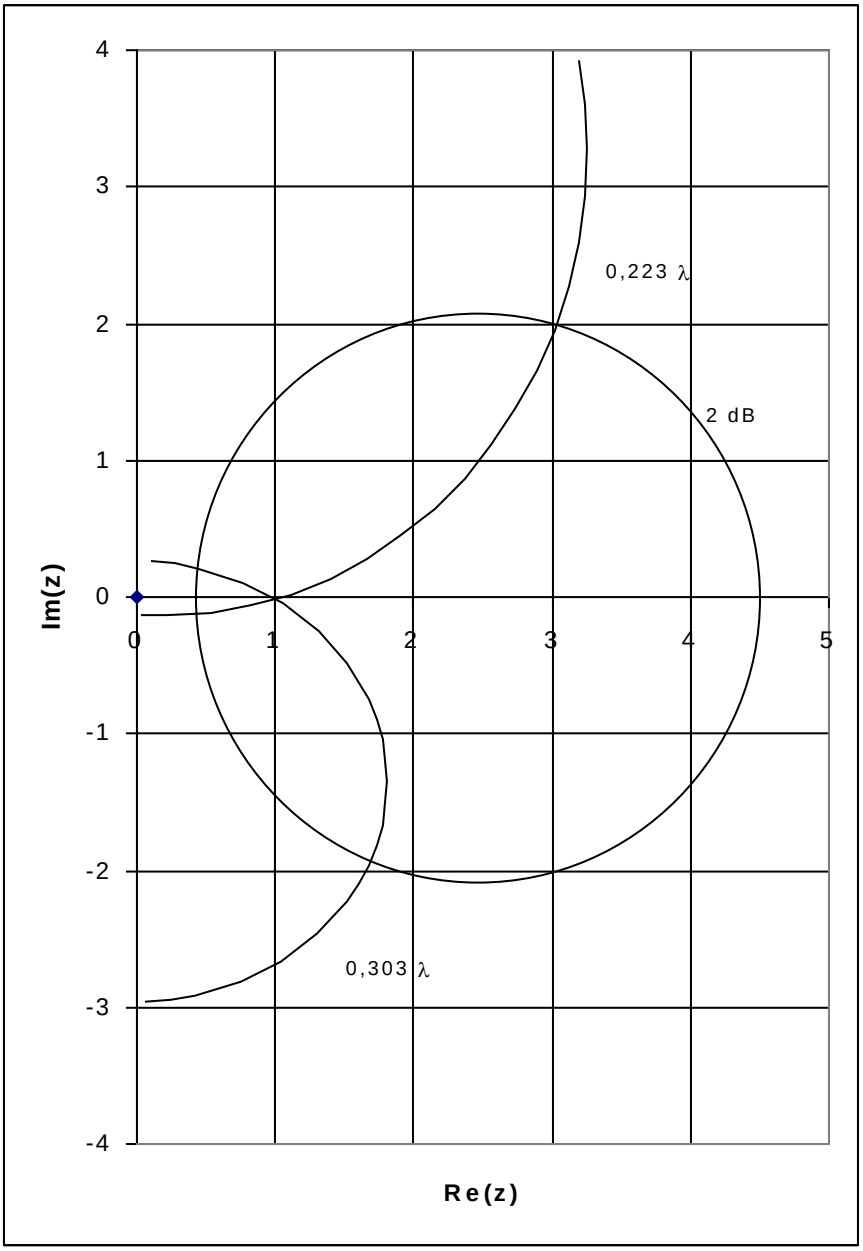


Figura 51 Diagrama bicircular

Los problemas se formulan en términos de estos lugares geométricos y el diagrama se utiliza para pasar constantemente de un plano al otro. Por ejemplo, para hallar la impedancia de entrada de una línea terminada en una impedancia dada, se ubica la misma en el plano z. A continuación se ubican las líneas correspondientes al módulo y ángulo del coeficiente de reflexión. Si la línea es sin pérdidas, las impedancias de entrada posibles estarán sobre la circunferencia correspondiente a dicho módulo. Para determinar el valor de la impedancia se lee el ángulo (en

lambdas), se suma la longitud de la línea y con este valor se localiza el punto final sobre la circunferencia de módulo constante. Considere el siguiente ejemplo: z_c=3 + j2 y la línea mide 0,08 λ . Las circunferencias correspondientes son: 2 dB y 0,223 λ . El punto final estará sobre la circunferencia a 0,223+0,08=0,303 λ, lo cual corresponde a una impedancia de 1,4 – j 1,9

3.11.2 La Carta de Smith

La Carta de Smith es una representación del plano Γ donde están indicados los lugares geométricos correspondientes a r=Re(z)= constante y x=Im(z)=constante. En los últimos años se ha vuelto más popular que el Diagrama Bicircular, por lo que se le estudiará con más detalle. Sin embargo, las técnicas mostradas aquí son igualmente aplicables a la otra carta, aunque existen situaciones donde una presenta ventajas respecto a la otra. La transformación de partida es:

$$\Gamma = \frac{z-1}{z+1} = \frac{z-1+1-1}{z+1} = 1 - \frac{2}{z+1}$$

Esta transformación conforme puede ser interpretada en términos de las siguientes cuatro transformaciones elementales:

a) Una translación en la cantidad (1,0) : z+1

b) Una inversión alrededor del origen : 1/(z+1)

c) Una multiplicación por (-2,0): -2/(z+1)

d) Una translación en (1,0) : 1-2/(z+1)

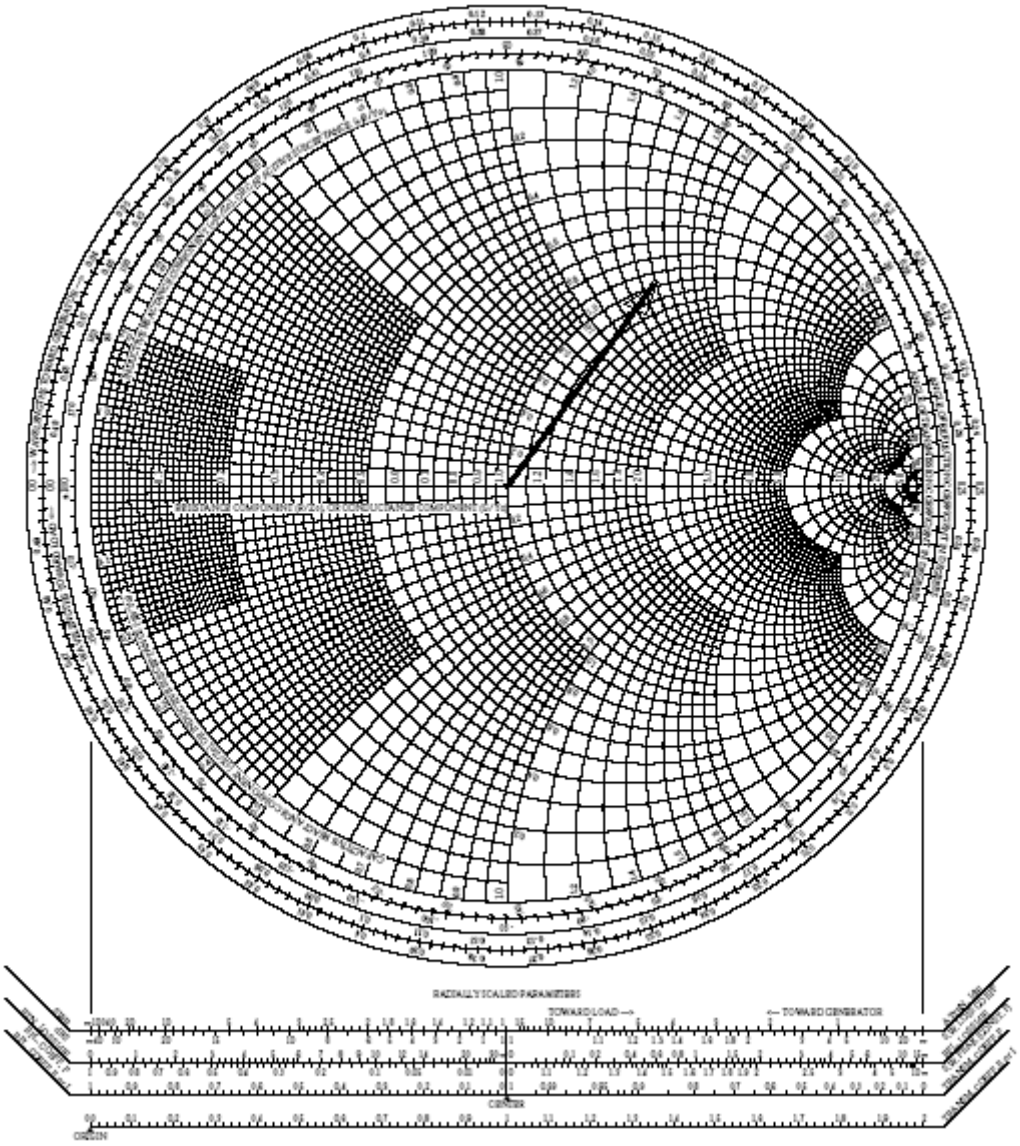


Figura 52 Carta de Smith

La figura representa una Carta de Smith tal y como se imprime comercialmente hoy en día. En la misma se ha mostrado a título de ejemplo el vector del coeficiente de reflexión Γ correspondiente a la impedancia 1+j 1,5. Las circunferencias de parte real constante tienen sus centros ubicados sobre el eje horizontal, en tanto que las de parte imaginaria constante son perpendiculares a las primeras y sus centros están sobre el eje vertical (no mostrado en el dibujo). En la parte inferior se muestran varias escalas auxiliares que dependen del módulo del coeficiente de reflexión, ρ: Coeficiente de reflexión de potencia, ROE (o SWR), RET, REFL, Tensión normalizada, etc. Su uso se mostrará más adelante con diversos ejemplos.

En la actualidad muchos equipos de medición, en particular los analizadores de redes, muestran

sus resultados directamente sobre la Carta de Smith como se muestra en la siguiente figura.

Figura 53 Analizador de Redes

3.11.3Representación de Tensiones y Corrientes en la Carta de Smith

Debido a que la Carta de Smith es una representación del plano Γ es posible indicar en ella otras cantidades relacionadas con el coeficiente de reflexión. En particular es posible indicar las tensiones y corrientes normalizadas tomando en cuenta que,

$$v = \frac{V}{V^+} = 1 + \Gamma \qquad \text{e} \qquad i = \frac{I}{I^+} = 1 - \Gamma$$

como se indica en la figura siguiente.

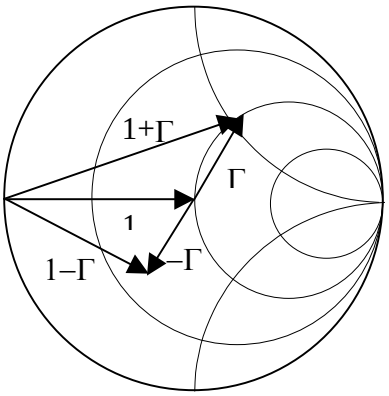


Figura 54 Tensiones y corrientes en la Carta de Smith

3.12 Aplicaciones de la Carta de Smith

3.12.1 Impedancia de entrada de una línea sin pérdidas

Hallar la impedancia de entrada de una línea sin pérdidas por medio de la Carta de Smith es muy fácil si se toma en cuenta que un desplazamiento a lo largo de la línea produce sólo un cambio en el ángulo de fase del coeficiente de reflexión. En este caso se utiliza la Carta como un nomograma para la conversión de impedancia normalizada en Γ. A continuación se la resta la cantidad 2βl al ángulo del coeficiente de reflexión y finalmente se obtiene la impedancia de entrada por medio de la misma carta.

Gráficamente el procedimiento consiste en localizar la intersección de las circunferencias de parte real constante y parte imaginaria constante correspondientes a las componentes de la impedancia de la carga. El radio vector que une este punto con el centro de la carta es Γ_{carga}. Se traza entonces un segmento de recta que prolongue este radio vector hasta el borde de la carta y se lee el ángulo del coeficiente de reflexión. Si interesase conocer el módulo de Γ basta con llevar la longitud de este vector por medio del compás a las escalas auxiliares que se hallan en la parte inferior de la carta. Si se conoce la longitud **l** de la línea, entonces al ángulo hallado se le resta la cantidad 2βl, en grados, y se traza otro radio vector que una al centro de la carta con el borde a ese ángulo, y por medio de un compás se lleva el módulo de Γ_{carga} sobre esta nueva línea. De las circunferencias de parte real y parte imaginaria que pasan por este punto se leen directamente las componentes de la impedancia de entrada como se muestra en la figura.

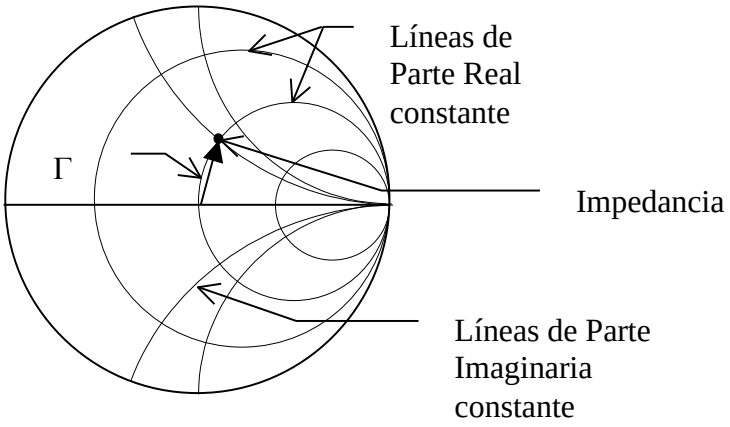


Figura 55 Lugares geométricos en la Carta de Smith

En el caso de que la longitud de la línea sea variable, el ángulo variará y el extremo del vector Γ describirá un círculo,

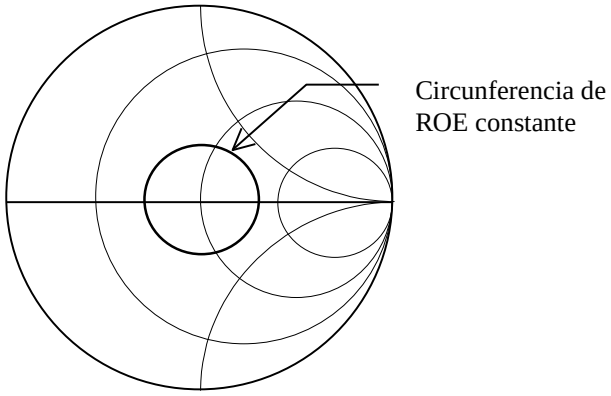


Figura 56 Circunferencias de ROE constante

3.12.2 Admitancia de entrada de una línea sin pérdidas

Si se conoce la admitancia de la carga y se desea hallar la admitancia de entrada de la línea, el procedimiento es idéntico al anterior, con la única diferencia conceptual que ahora la Carta de Smith es la representación del plano de coeficiente de reflexión de corriente donde están indicados los lugares geométricos correspondientes a valores constantes de la parte real y la parte imaginaria de la admitancia normalizada, pues tienen la misma relación funcional que la existente entre el coeficiente de reflexión de tensión y la impedancia.

3.12.3 Conversión de Impedancia a Admitancia.

Debido a que $\Gamma=-\Gamma_i$ es posible convertir impedancias en admitancias directamente por medio de la Carta de Smith. Conceptualmente se estaría utilizando la Carta para hallar el coeficiente de reflexión de tensión correspondiente a la impedancia. El coeficiente de reflexión de corriente se halla inmediatamente de la relación anterior y ahora se utiliza la carta de nuevo para hallar admitancia a partir de Γ_i.

Gráficamente el procedimiento consiste en localizar el punto de intersección de las circunferencias correspondientes a las coordenadas de la impedancia. Por este punto se traza una línea recta que pase además por el centro de la carta. Con el compás se lleva el módulo del coeficiente de reflexión sobre la prolongación de este segmento, a partir del centro, y se leen directamente las coordenadas de la admitancia.

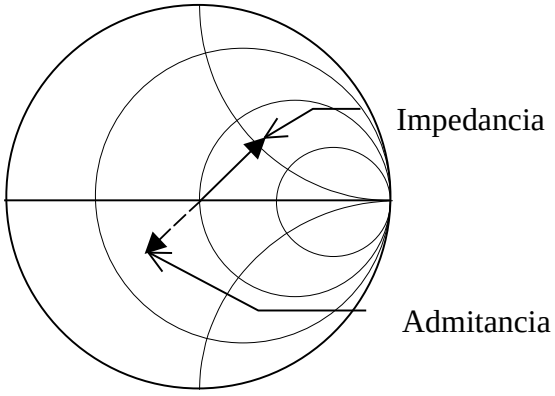


Figura 57

3.12.4 Voltajes y Corrientes.

Al describir el patrón de ondas estacionarias se dijo que el mismo era una representación de la tensión total r. m. s. a lo largo de la línea. La tensión normalizada se obtiene de dividir esta tensión total entre la tensión incidente y se representa por medio del diagrama de manivela, es decir, $v=\frac{V}{V^+}=1+\Gamma$, con una expresión equivalente para la corriente $i=\frac{I}{I^+}=1+\Gamma_i=1-\Gamma$

Estas magnitudes son sólo función de Γ y por tanto tienen representación en la Carta de Smith.

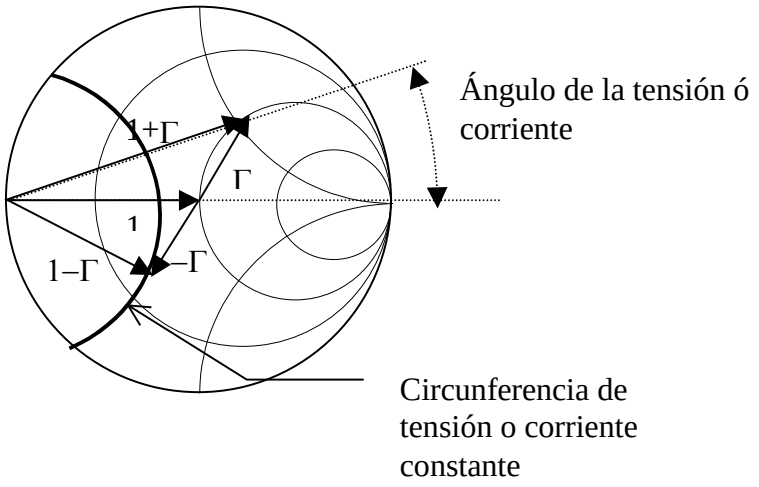


Figura 58

En algunos problemas prácticos esta representación tiene utilidad pues los valores de v e i son fácilmente medibles en módulos (aunque no en fase). En estos casos la información de fase puede hallarse gráficamente por medio de la Carta de Smith si se conoce algún dato adicional como la distancia entre los instrumentos.

En el siguiente ejemplo se tiene que la potencia incidente medida fue de 100 Watts, la corriente en el extremo del transmisor fue de 1,6 Amperes y la corriente en la base de la antena fue de 1,8 Amperes. La longitud de la línea de transmisión hasta la base de la antena es de 0,42 λ a la frecuencia de trabajo, y la línea tiene una impedancia de 50 Ohms. ¿Cuánto vale la impedancia en la base de la antena?.

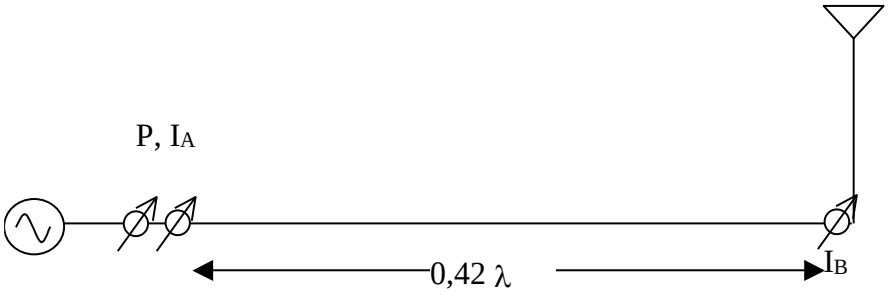


Figura 59

La corriente incidente en el extremo transmisor vale $i'_A = \sqrt{100/50} = 1{,}414\ \text{Amp}$. En el extremo transmisor se que tiene que la circunferencia con centro en la admitancia (0+j0) y de radio 1,13 es el lugar geométrico de todas las admitancias tales que el módulo de la corriente normalizada i_A vale 1,6/1,414=1,13. Las admitancias de carga que producirían esta situación se en el extremo

del transmisor pueden ser obtenidas trasladando (gráficamente) hacia el extremo de la carga cada uno de los puntos de este lugar geométrico en la cantidad 0,42 λ.

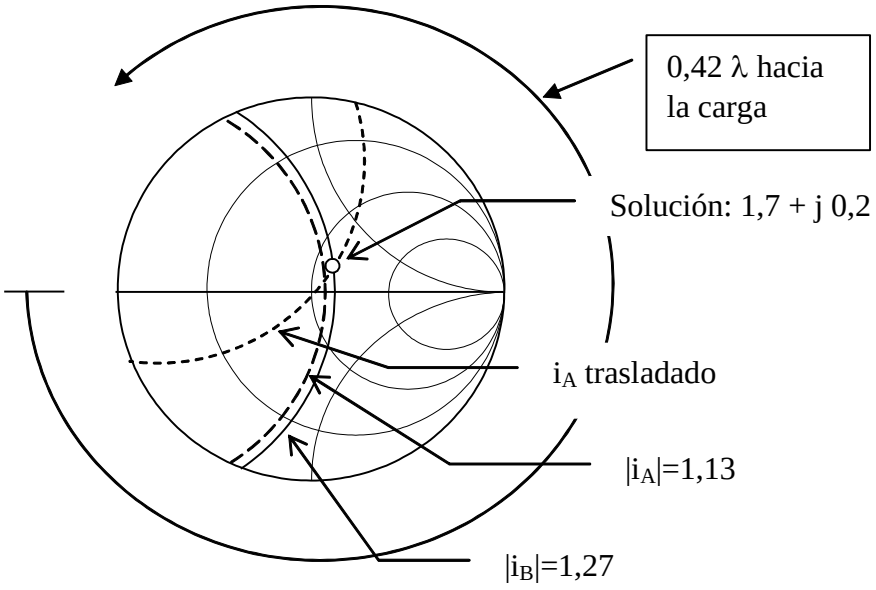


Figura 60

Debido a que la línea es sin pérdidas, esto puede lograrse gráficamente girando hacia la carga el centro de la circunferencia en 0,42 λ y trazándolo de nuevo con el mismo radio de 1,13. Por otra parte, la circunferencia de radio 1,27 centrada en (0,+j0) representa el lugar geométrico de todas las admitancias de carga que producen una corriente normalizada cuyo módulo es1,27. La intersección de ambas circunferencias satisface simultáneamente las dos condiciones y es por tanto la solución al problema. El resultado buscado es y_c=1,7 +j 0,2

3.12.5 Líneas con pérdidas

Además de las aplicaciones mencionadas para líneas sin pérdidas, la Carta de Smith es útil para mostrar los cambios de impedancia que se suceden en una línea real donde existen pérdidas. La fórmula de la impedancia de entrada de una línea real es:

$$z_{in} = \frac{z_c + \tanh(2\gamma\, l)}{1 + z_c\, \tanh(2\gamma\, l)} = \frac{z_c + \tanh(2(\alpha + j\beta)\, l)}{1 + z_c\, \tanh(2(\alpha + j\beta)\, l)}$$

La misma es no sólo complicada de evaluar, sino que tampoco aporta información sobre los procesos que se están sucediendo en la línea a medida que se consideran puntos más alejados de la carga. Por otra parte, el coeficiente de reflexión a la entrada de la línea es:

$$\Gamma_{in} = \Gamma_c\, e^{-2\gamma l} = \Gamma_c\, e^{-2\alpha l}\, e^{-2j\beta l} = \rho_c\, e^{-2\alpha l}\, e^{j(\theta_c - 2\beta l)}$$

Esto significa que el ángulo del coeficiente de reflexión se modifica de la misma manera que en el caso de la línea sin pérdidas. Adicionalmente se observa que el módulo del coeficiente de reflexión ha quedado disminuido en el factor $e^{-2\alpha l}$. Esto se traduce en que, a medida que se consideran puntos más alejados de la carga, el extremo del radio vector que representa al coeficiente de reflexión describirá una espiral en el plano Γ en lugar de una circunferencia.

Para hallar la impedancia de entrada en un caso específico bastará con ubicar la carga en la Carta y girarla hacia el generador como si se tratase de una línea sin pérdidas. A continuación se corrige el módulo del coeficiente de reflexión multiplicando el radio de la circunferencia por el término $e^{-2\alpha l}$. Para evitar cálculos adicionales se puede hacer uso de las escalas auxiliares de la Carta de Smith, en particular una marcada "ATTEN, 1dB MAJ. DIV", en la cual están indicadas divisiones con un paso de 1 dB de atenuación. El procedimiento consiste en llevar a esta escala el módulo del coeficiente de reflexión y luego moverse a lo largo de la misma el número de dB's correspondientes a la atenuación de la línea, en la dirección indicada (hacia la carga o el generador según corresponda). El nuevo valor del módulo se lleva por medio del compás a la carta para leer la impedancia correspondiente.

3.12.6 Acoplamiento de cargas con un stub

El caso del acoplamiento de cargas por medio de un stub sencillo puede resolverse fácilmente por medio de la Carta de Smith una vez que se establezcan las condiciones necesarias para trazar los lugares geométricos correspondientes, para hallar la solución en forma gráfica. La situación se describe por medio del siguiente esquema:

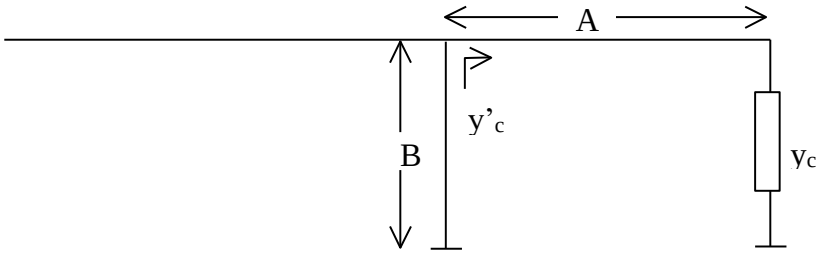


Figura 61

Como la distancia A es desconocida también lo es la admitancia vista a la entrada de la línea, y'_c. Sin embargo, todos los valores posibles de esta admitancia deben estar sobre una circunferencia con radio igual al del módulo del coeficiente de reflexión de la carga y_c; esto

determina una primera ecuación gráfica o lugar geométrico. Por otra parte, como la admitancia de entrada del stub es reactiva pura, solamente afectará a la parte imaginaria de la admitancia resultante del paralelo con y'_c. Como se desea lograr el acoplamiento, la admitancia resultante de la combinación del stub con la admitancia trasladada de la carga deber ser (1+j0). En consecuencia, la parte real de la admitancia y'_c debe ser 1, y la parte imaginaria será compensada por el stub. Esto determina una nueva relación geométrica que deben cumplir las admitancias y'_c: el lugar geométrico es la circunferencia correspondiente a parte real igual a 1. Entonces, la solución del problema corresponde a aquellos puntos de intersección de ambas circunferencias, pues en ellos se satisfacen simultáneamente ambas condiciones. Midiendo el desplazamiento desde la carga hasta el punto (o los puntos) solución se encuentra la longitud del trozo de línea A. Adicionalmente, será necesario colocar un stub cuya reactancia compense la parte imaginaria de la admitancia en los puntos solución. Con esta información se halla entonces la longitud del trozo de línea en cortocircuito, B.

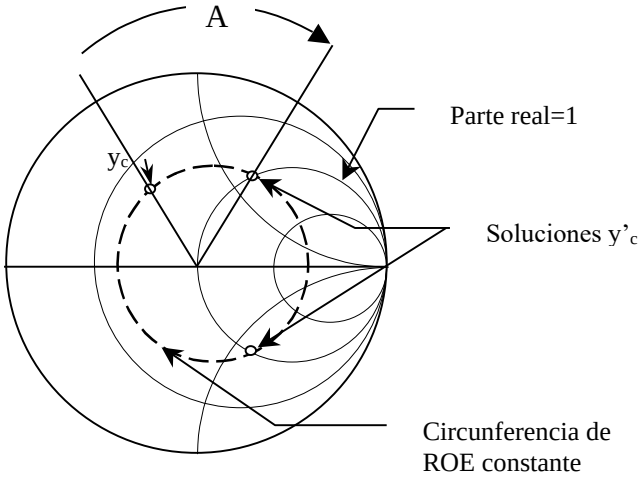
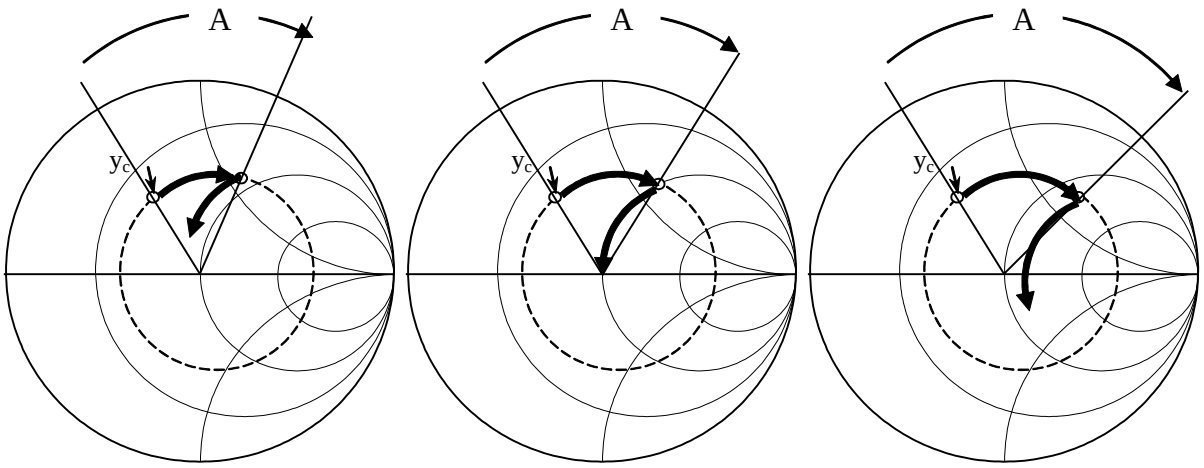


Figura 62

3.12.6.1 Respuesta de frecuencia del stub sencillo

Es necesario estar consciente de que la solución hallada es válida únicamente a un frecuencia. Los sistemas de comunicaciones prácticos ocupan un cierto ancho de banda, el cual a su vez depende de la frecuencia máxima de la banda base a ser transmitida, así como del método de modulación empleado. Cuando varía la frecuencia, cambia la longitud eléctrica de cada de las líneas que conforman el sistema de acoplamiento, por lo cual es posible que la impedancia de entrada tenga un valor diferente de la unidad y habrá reflexiones. Este comportamiento puede

ser fácilmente anticipado en la Carta de Smith. Consideremos el ejemplo anterior, para dos frecuencias ubicadas a ambos lados de la frecuencia de diseño del acoplador.



$f < f_0$ $f=f_0$ $f>f_0$

Figura 63

En consecuencia, se obtiene un sistema que presenta el comportamiento deseado en sólo una gama relativa estrecha de frecuencias. Debido a esto es necesario definir un valor máximo de coeficiente de reflexión tolerable, para en función de esto hallar la gama de frecuencias de operación del dispositivo.

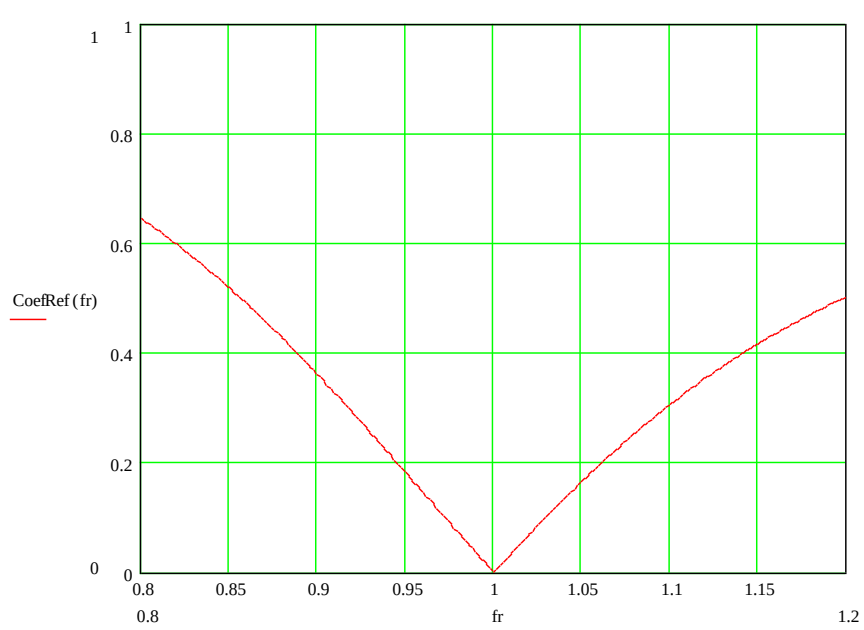


Figura 64

En la práctica se busca un comportamiento relativamente plano en la banda pasante, pero ello requiere del uso de un mayor número de stubs.

3.12.7 Acoplamiento por medio de stub doble

Aunque el caso del acoplamiento con un stub había sido resuelto en forma analítica anteriormente, además del método gráfico, la situación se complica extraordinariamente cuando el sistema de acoplamiento incorpora más de un stub. Más aún, es posible que en ciertas condiciones de impedancia de carga no pueda lograrse el acoplamiento (es decir, que no halla solución) y esta situación no puede preverse fácilmente en un método exclusivamente analítico. Sin embargo, al representarse gráficamente las condiciones que deben cumplir las admitancias (o impedancias) involucradas es fácil anticipar aquellas situaciones en las cuales no es posible hallar una solución que proporcione el acoplamiento deseado.

Una situación típica de acoplamiento con stub múltiple se presenta en el siguiente diagrama, donde las reactancias incógnitas se hallan en paralelo con una separación fija A entre ellas.

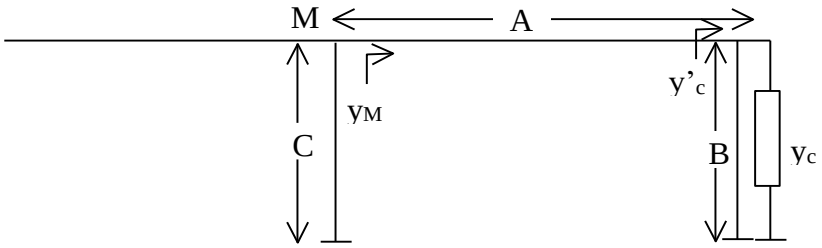


Figura 65

La admitancia total resultante de la combinación paralelo de la carga y_c con el stub B es indeterminada, pero está ubicada sobre el lugar geométrico de todas las admitancias que tengan la misma parte real que y_c. Este es la circunferencia de parte real constante que pasa por el punto correspondiente a la impedancia de carga. Como la longitud A es conocida, la admitancia y_M es obtenida de girar esta circunferencia hacia el generador en esta distancia. Por otra parte, esta admitancia y_M deberá ser de la forma 1+j b, donde el valor de la subceptancia es desconocido, pero será compensado por el stub C. La intersección de estos lugares geométricos que describen la admitancia y_M constituye la solución deseada. De aquí se obtiene inmediatamente el valor de la subceptancia del stub C, y por medio de la carta su longitud. Girando este punto (o puntos) solución hacia la carga se halla y'_l, de donde se obtiene la subceptancia del stub B y su longitud. El procedimiento se ilustra en la siguiente figura:

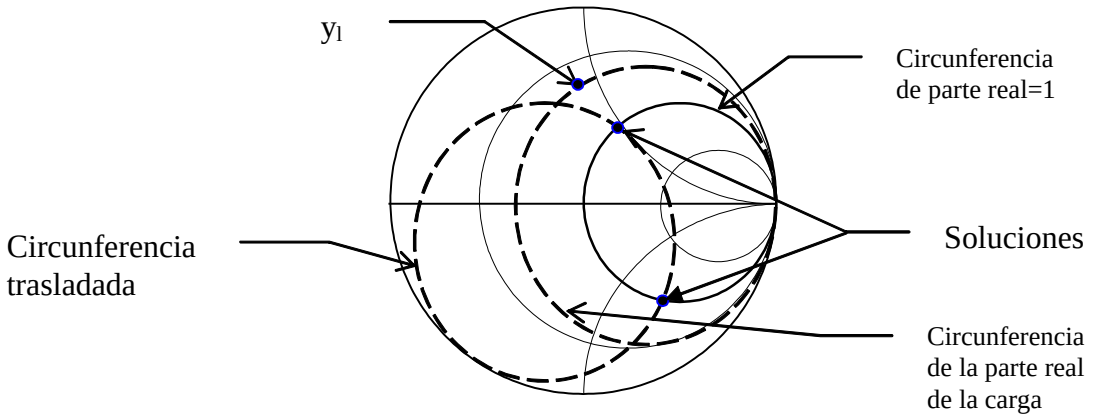


Figura 66

De aquí se observa claramente que si la parte real de la admitancia de carga es menor que la unidad, existirá siempre una solución pues las circunferencias se interceptarán (a excepción talvez del caso cuando A sea un número entero de medias longitudes de onda). Sin embargo, cuando la parte real de y_l es mayor de 1 es posible que, dependiendo del valor de la longitud A, las circunferencias no se intercepten y no hay solución.

La utilización de un número mayor de stubs permite evitar estas situaciones críticas y, aunque su solución es más laboriosa que el ejemplo mostrado, la misma es conceptualmente equivalente al método descrito.

3.12.8 Líneas con diferente impedancia característica

En ocasiones es necesario trabajar con líneas de diferente impedancia característica. Sin embargo, al trabajar sobre la Carta de Smith es necesario ser cuidadoso pues el coeficiente de reflexión cambia al pasar de un medio al otro ya que, si bien la impedancia no normalizada no cambia en la interfaz, al dividir por la resistencia de normalización cambia la impedancia normalizada. Conceptualmente el problema consiste en dividir la red en varios trozos, cada uno de impedancia característica diferente, y utilizar la carta para resolver cada trozo por separado, teniendo la precaución de desnormalizar y renormalizar las impedancias cuando se cambia de una línea a otra. Considérese el ejemplo siguiente, donde las impedancias características de las diferentes líneas están referidas al generador.

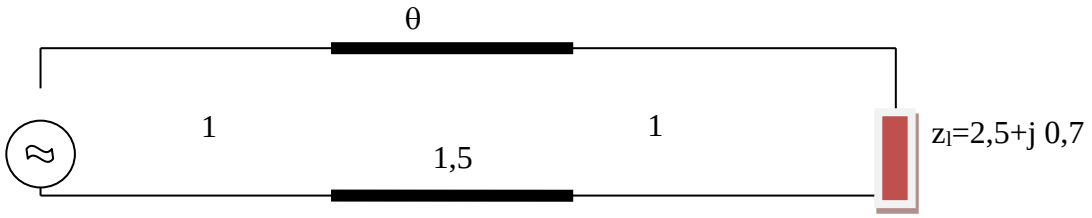


Figura 67

Se desea conocer la impedancia de entrada del lado del generador a medida que la distancia eléctrica de la línea cambia (por ejemplo, al cambiar la frecuencia). Para resolver esto es necesario normalizar la carga sobre la línea de z_0=1,5. El nuevo valor de impedancia vale: 1,66+j 046. A medida que θ cambia la impedancia de entrada se mueve sobre una circunferencia centrada sobre el centro de la Carta de Smith (el punto de impedancia 1+j 0), para el caso de la línea central. Finalmente, este valor deberá ser desnormalizado por 1,5 para obtener la impedancia de entrada. Si se realiza este procedimiento para cada valor de θ se obtiene que el lugar geométrico de la impedancia de entrada será una circunferencia, pero centrada en el valor 1,5+j 0. Es decir, cuando se quiere representar el comportamiento de una línea con una impedancia característica distinta de la tomada como referencia, entonces el lugar geométrico de los desplazamientos a lo largo de la línea seguirá siendo una circunferencia, pero su centro coincide con el corte sobre el eje real de una circunferencia de parte real igual a la 2 veces la impedancia característica más uno. En el caso particular del transformador λ/4 la impedancia característica vale $\sqrt{ROE}$ para una carga de valor ROE

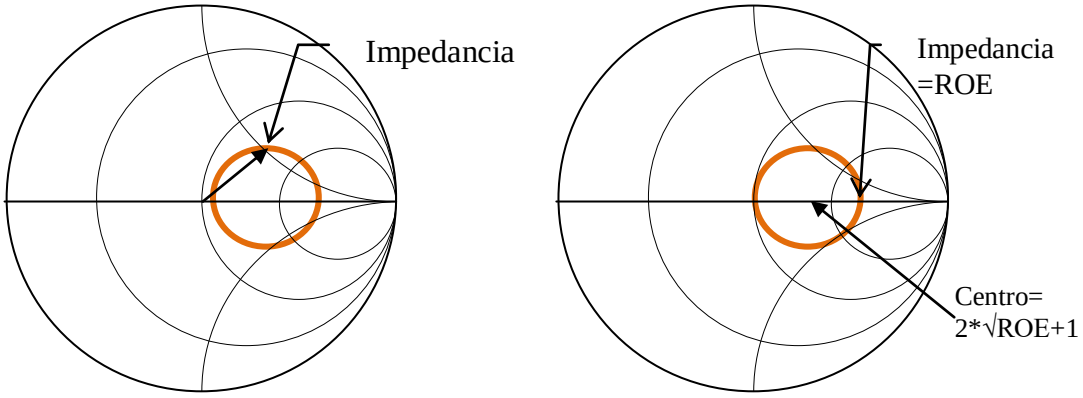


Figura 68. a) Caso General. B) Transformador λ/4

3.12.9 Acoplamiento con parámetros concentrados

Si bien la Carta de Smith ha sido descrita hasta ahora como una herramienta para el estudio de la línea de transmisión, en la cual los parámetros de resistencia, inductancia, capacitancia y conductancia están distribuidos a lo largo de la misma, es posible utilizarla también para resolver problemas que involucren parámetros concentrados. En particular es posible utilizar la carta para la conversión de impedancia a admitancia (y viceversa), y para describir gráficamente las condiciones que deberán cumplir las soluciones a través del trazado de los lugares geométricos correspondientes. Tales sistemas de acoplamiento encuentran aplicación a frecuencias de MF y HF donde las longitudes de línea obtenidas para los métodos anteriores resultan inapropiadas.

Como ejemplo de esto se estudiará a continuación la aplicación de la Carta de Smith a la solución de dos sistemas de acoplamiento basados en parámetros concentrados y denominados: serie-paralelo y paralelo-serie.

3.12.9.1 Acoplamiento serie-paralelo

En el siguiente sistema se desea hallar los valores de la inductancia y la capacitancia que permiten acoplar la carga y_l a la línea de transmisión. Todas las impedancias están normalizadas respecto a la línea de transmisión.

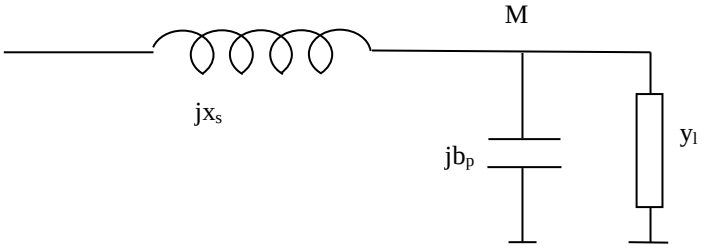


Figura 69

La admitancia total, resultante de la combinación de la admitancia de carga con el capacitor, describirá en la Carta de Smith un lugar geométrico, el cual es un segmento de la circunferencia de parte real igual a la conductancia de la carga. La impedancia correspondiente se obtiene de invertir la admitancia, lo cual corresponde gráficamente a rotar el lugar geométrico obtenido anteriormente en 180º. Esta impedancia deberá ser tal que su parte real sea igual a la unidad,

pues el elemento serie cancelará la componente imaginaria para lograr el acoplamiento; tal condición describe otro lugar geométrico que representa la impedancia de la combinación. La solución se obtiene de la intersección de ambas circunferencias como se muestra en la figura.

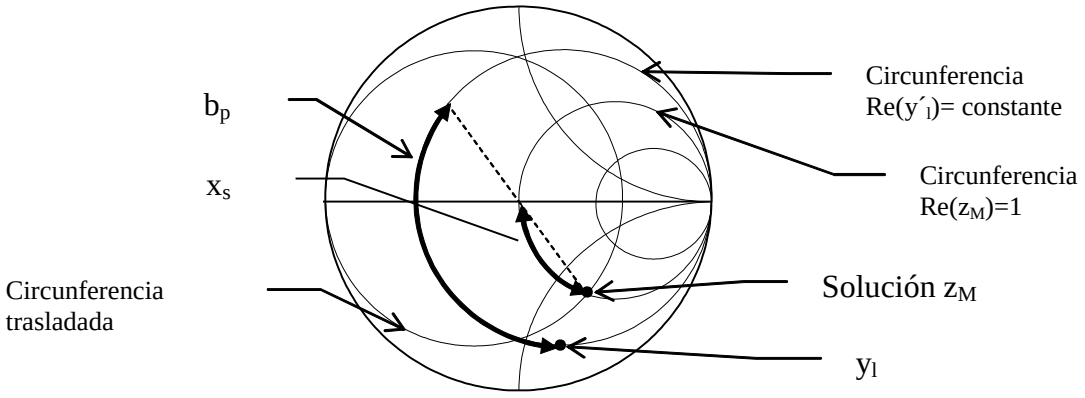


Figura 70

De la geometría de esta figura se concluye que podrá hallarse una solución siempre que las circunferencias se corten, lo cual ocurre siempre que la parte real de la admitancia sea menor que la unidad. El valor de la reactancia serie, x_s, es el negativo de la parte imaginaria de la impedancia correspondiente a la intersección de las circunferencias mencionadas (marcada z_M en el dibujo). Para conseguir el valor de la subceptancia capacitiva, basta con trazar una recta desde el punto z_M a través del centro de la Carta, hasta cortar la circunferencia correspondiente a la parte real de la carga, y realizar la diferencia de las partes imaginarias.

3.12.9.2 Acoplamiento paralelo-serie

El sistema de acoplamiento paralelo-serie es complementario del anterior como se puede apreciar en el siguiente diagrama

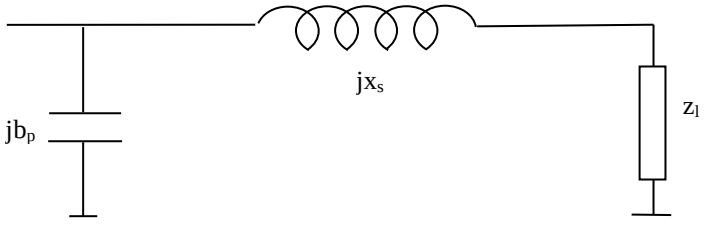


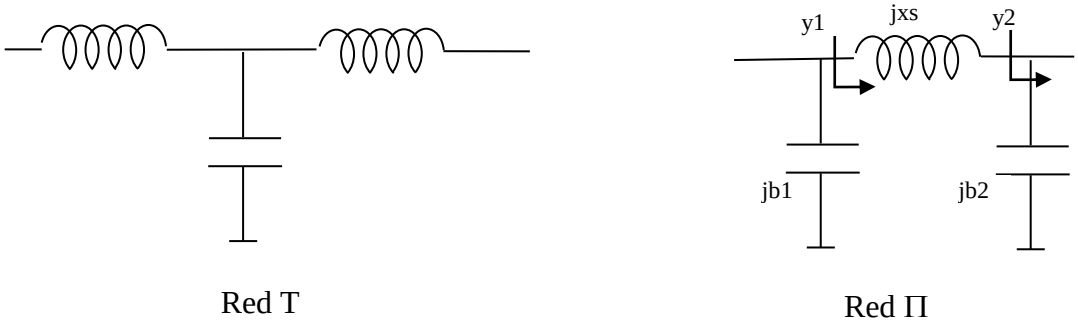
Figura 71

De manera análoga, la combinación serie de la impedancia de carga con la reactancia x_s describe un lugar geométrico en la Carta de Smith es un segmento de la circunferencia correspondiente a

la parte real de la carga. Al invertirlo para realizar la combinación paralelo, la parte real de esta admitancia debe ser igual a 1 para lograr el acoplamiento, pues la parte imaginaria será cancelada por el condensador. La condición para lograr el acoplamiento será entonces que la parte real de la impedancia de carga sea menor que la unidad.

3.12.9.3 Métodos combinados. Redes T y Redes Π

Las limitaciones de los métodos anteriores respecto a la parte real de la carga para poder lograr el acoplamiento pueden ser superadas por medio de una combinación de ambas técnicas. De acuerdo a como se combinen las redes anteriores es posible obtener dos configuraciones básicas: el circuito T y el circuito Π, como se muestra a continuación.



Red T Red Π

Figura 72

De manera similar al caso del acoplamiento multistub, la solución de este problema es más laboriosa que en el caso paralelo-serie (o su complementario), pero la utilización de la Carta de Smith permitirá hallar una solución más rápidamente que por la vía analítica. Más aún, del método gráfico se tiene una idea más clara del proceso de acoplamiento y de las posibles condiciones que pudiesen limitar la aplicación del circuito de acople. Esencialmente se estará usando la Carta para convertir los lugares geométricos de impedancia a los de admitancia y viceversa. A continuación se muestran los lugares geométricos para la red PI.

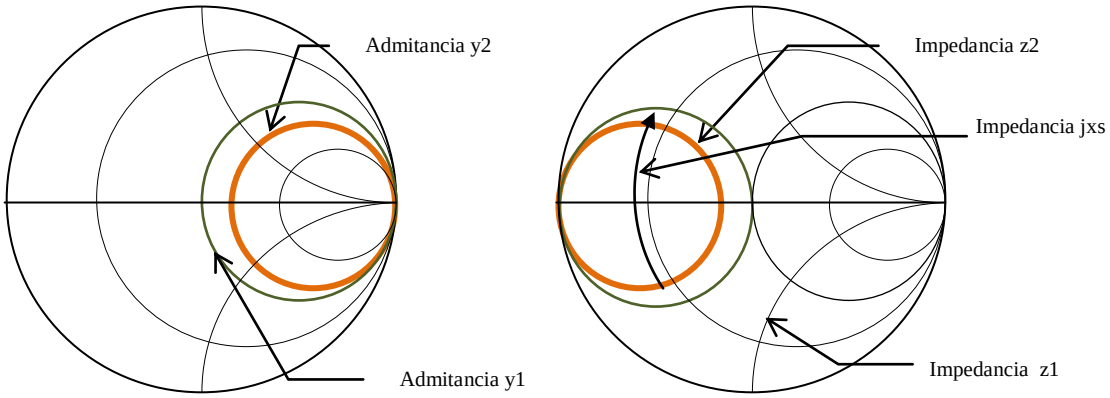


Figura 73

3.12.10 Solución computacional

Hoy en día se dispone de computadoras que pueden realizar muchos de los cálculos mencionados anteriormente con alta velocidad y precisión de cálculo. Sin embargo, para poder apreciar apropiadamente los resultados obtenidos es conveniente representarlos en forma gráfica sobre la Carta de Smith, en lugar de simplemente presentar los resultados numéricos.

Existen muchos programas que pueden utilizarse para resolver problemas de líneas de transmisión, con mayor o menor grado de dificultad. Algunos son programas específicos que se escriben en lenguajes como Fortran, C++, o Pascal. Además del esfuerzo de programación, requieren que el usuario diseñe una interfaz apropiada para el ingreso y presentación de los datos, lo cual puede consumir mucho tiempo en comparación al problema práctico de líneas de transmisión que se desea resolver. En general, este enfoque se usa cuando se desea crear un paquete de software destinado en su uso o comercialización a terceras personas.

Por otra parte existen paquetes de uso general que permiten el ingreso de las ecuaciones de líneas de transmisión sin necesidad de programar. El caso más simple son los calculadores tipo Excel de Microsoft o su equivalente en OpenOffice. Los datos se disponen en casillas tabulares y las fórmulas necesarias se ingresan en otras casillas. Sin embargo, a pesar de su alta flexibilidad, los resultados tienden a estar pobremente documentados, por lo que es difícil entender lo que se hizo al cabo de varias semanas. Además, a pesar de que el Excel tiene facilidades para la representación gráfica tanto en coordenadas polares como rectangulares, carece de la facilidad de representación en la Carta de Smith como las que tienen paquetes comerciales específicos como RFSim99.

Una alternativa interesante la proveen los paquetes de cálculo de alto nivel, en los cuales el

usuario ingresa las ecuaciones y los datos del problema a través de una interfaz amigable, y que de igual manera proporciona facilidades gráficas para la presentación de los resultados, incluso en el formato de Carta de Smith. Adicionalmente, estos paquetes permiten la realización de tareas complejas a través de la invocación de ciertas funciones pre-programadas de manera de liberar al usuario de la necesidad de desarrollar estas porciones de software. Un ejemplo donde se requiere la utilización de una herramienta como esta ocurre en el caso de la resolución de sistemas de acoplamiento con múltiples stubs. Aunque, la resolución de un sistema de dos stubs es relativamente simple de realizar en forma gráfica, la situación se complica cuando el número de stubs se incrementa. Esto se demostrará más adelante con ejemplos. Uno de los paquetes más flexibles lo constituye MathCad (del proveedor MathSoft), conjuntamente con Axum del mismo fabricante. Este último provee las facilidades de presentación sobre la Carta de Smith entre otras. En lo que sigue de este capítulo se presentarán varios ejemplos que demuestran el uso de esta herramienta, aunque las ideas básicas son fácilmente aplicables a otros paquetes de software.

3.12.10.1 Algoritmos recursivos.

Si bien uno pudiera simplemente ingresar las ecuaciones en forma bruta en estos sistemas, es necesario estar conscientes de que el tiempo de cálculo y la precisión del mismo pueden verse afectados por una estrategia inapropiada. Por ejemplo, la impedancia puede variar en una amplia gama (teóricamente desde $-\infty$ hasta $+\infty$, pasando por cero), pero las computadoras no se comportan apropiadamente cuando tienen que trabajar con cantidades que alcancen estos valores extremos. Es probable, entonces que se obtengan valores "extraños" o que simplemente el sistema se "cuelgue" como consecuencia de una división por cero. Por otra parte, el coeficiente de reflexión está acotado entre 0 y 1, y por tanto se minimiza la posibilidad de errores o inestabilidades de cálculo. Adicionalmente, cuando el mismo cálculo se debe realizar sobre un circuito constituido por un gran número de secciones, es conveniente utilizar un algoritmo recursivo que simplifique las operaciones y disminuya el tiempo de cómputo. El algoritmo que se describe a continuación fue utilizado en un problema de optimización mostrado más adelante y permitió lograr una solución convergente en un quinto del tiempo que requería la utilización de impedancia, además de garantizar una solución estable (cosa que no ocurría en el otro caso).

3.12.10.2 Coeficiente de Reflexión en líneas en paralelo.

El punto de partida es resolver la interconexión de dos líneas por cuanto casi todos los problemas de acoplamiento requieren del uso de stubs, la mayoría de ellos en paralelo. Sin embargo, este algoritmo se puede aplicar casi sin cambios al caso serie cuando sea necesario.

Considérese el siguiente sistema constituido por la interconexión de tres líneas. Se desea conocer el coeficiente de reflexión visto en el punto de unión desde la línea de la izquierda, Γ_T, y producido por los coeficientes Γ_1 y Γ_2 de las otras dos líneas conectadas en paralelo.

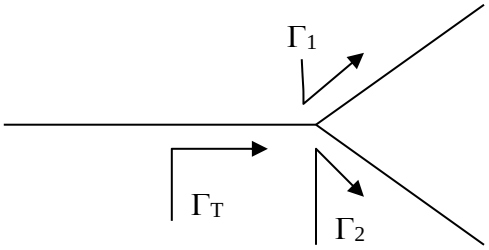


Figura 74

Las admitancias a la entrada de las líneas 1 y 2 se hallan a partir de los respectivos coeficientes de reflexión:

$$y_1 = \frac{1-\Gamma_1}{1+\Gamma_1} \qquad y_2 = \frac{1-\Gamma_2}{1+\Gamma_2}$$

La admitancia total es la suma de las dos, por tanto

$$y_T = y_1 + y_2 = \frac{(1-\Gamma_1)(1+\Gamma_2)+(1-\Gamma_2)(1+\Gamma 1)}{(1+\Gamma_1)(1+\Gamma_2)} = 2\frac{1-\Gamma_1\Gamma_2}{(1+\Gamma_1)(1+\Gamma_2)}$$

El valor del coeficiente de reflexión se obtiene a partir de esta admitancia total

$$\Gamma_T = \frac{1-y_T}{1+y_T} = \frac{-2(1-\Gamma_1\Gamma_2)+(1+\Gamma_1)(1+\Gamma_2)}{2(1-\Gamma_1\Gamma_2)+(1+\Gamma_1)(1+\Gamma_2)}$$

Finalmente se obtiene:

$$\Gamma_T = \frac{-1+3\Gamma_1\Gamma_2+\Gamma_1+\Gamma_2}{3-\Gamma_1\Gamma_2+\Gamma_1+\Gamma_2}$$

Este algoritmo requiere un par de multiplicaciones complejas, 8 sumas y una división, pero lo más importante es que todas las cantidades involucradas están acotadas entre 0 y uno, y no hay posibilidad de que se presenten situaciones inestables. El cálculo de las admitancias requeriría 8 sumas y tres divisiones complejas, pero tiene el riesgo de que alguno de los denominadores pueda tender a cero, con lo cual el algoritmo puede producir resultados inesperados.

Es posible hallar también un algoritmo para los coeficientes de reflexión de corriente, tomando simplemente el negativo de los coeficientes de reflexión de tensión, es decir,

$$\Gamma_{iT} = \frac{1 - 3\Gamma_{i1}\Gamma_{i2} + \Gamma_{i1} + \Gamma_{i2}}{3 - \Gamma_{i1}\Gamma_{i2} - \Gamma_{i1} - \Gamma_{i2}}$$

La única situación potencialmente peligrosa ocurriría en el caso de que simultáneamente Γ_{i1} y Γ_{i2} sean iguales a 1, es decir, la combinación en paralelo de dos cortocircuitos. En el caso de un solo cortocircuito el algoritmo predice correctamente el resultado sin inestabilidades. Por ejemplo, si se hace $\Gamma_{i1}=1$

$$\Gamma_{iT} = \frac{1 - 3\Gamma_{i2} + 1 + \Gamma_{i2}}{3 - \Gamma_{i2} - 1 - \Gamma_{i2}} = \frac{2 - 2\Gamma_{i2}}{2 - 2\Gamma_{i2}} = 1$$

El algoritmo correspondiente, escrito en MathCad será:

$$\Gamma_t := \begin{cases} -1 \ if \ (\Gamma_1 = -1) \\ \dfrac{-1 + 3\,\Gamma_1\,\Gamma_2 + \Gamma_1 + \Gamma_2}{3 - \Gamma_1\,\Gamma_2 + \Gamma_1 + \Gamma_2} \ otherwise \end{cases}$$

Si ahora se quiere estudiar el comportamiento de una estructura constituida por secciones de línea de transmisión con stubs en paralelo, se pueden colocar las longitudes de línea y stubs en un arreglo (de dos columnas) y realizar los cálculos iterativamente. En el siguiente ejemplo se calculará la respuesta de frecuencia de una línea de transmisión terminada en una carga cuyo coeficiente de reflexión vale $0.7e^{j1.3}$, seguida de 6 stubs, como se muestra en la figura.

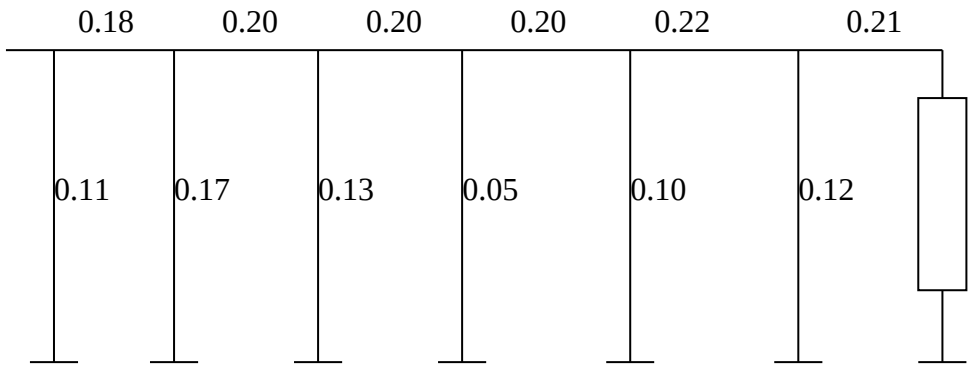


Figura 75

Las distancias indicadas en lambdas ocurren a la frecuencia central bajo estudio. Las longitudes de cada sección constituida por un trozo de línea y un stub se almacenan en un arreglo como sigue:

$$L := \begin{pmatrix} 0.21 & 0.12 \\ 0.22 & 0.10 \\ 0.2 & 0.05 \\ 0.2 & 0.13 \\ 0.2 & 0.17 \\ 0.18 & 0.11 \end{pmatrix}$$

Si denominamos "a" el valor del coeficiente de reflexión a la salida de una línea, el valor "b" a la entrada será $b = a\, e^{-4\pi j L_l}$ donde "Ll" es la longitud del trozo de línea. En el caso del stub, el coeficiente de reflexión del lado del cortocircuito vale -1, por lo que el coeficiente de reflexión valdrá $c = -1\, e^{-4\pi j L_s}$, donde obviamente Ls es el largo del stub.

El algoritmo queda finalmente como se indica, donde se ha tomado en cuenta la posibilidad de variar la frecuencia de operación.

$$\begin{aligned} &\text{CoefRef}(\text{freq}, r) := \left| \begin{array}{l} a \leftarrow \Gamma \\ \text{for } k \in 0..r \\ \quad \left| \begin{array}{l} b \leftarrow a \cdot \exp\left(-j \cdot 4 \cdot \pi \cdot L_{k,0} \cdot \text{freq}\right) \\ c \leftarrow -\exp\left(j \cdot 4 \cdot \pi \cdot L_{k,1} \cdot \text{freq}\right) \\ a \leftarrow \Gamma t(b, c) \end{array} \right. \\ |a| \end{array} \right. \end{aligned}$$

Si ahora se varía la frecuencia desde 0.8 hasta 1.2 de la frecuencia central se obtiene la siguiente respuesta:

$fr := 0.8, 0.81 .. 1.2$

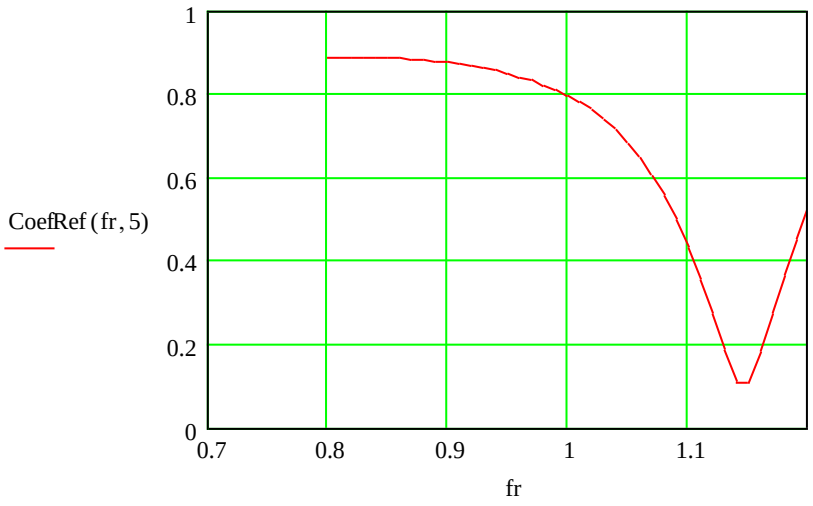
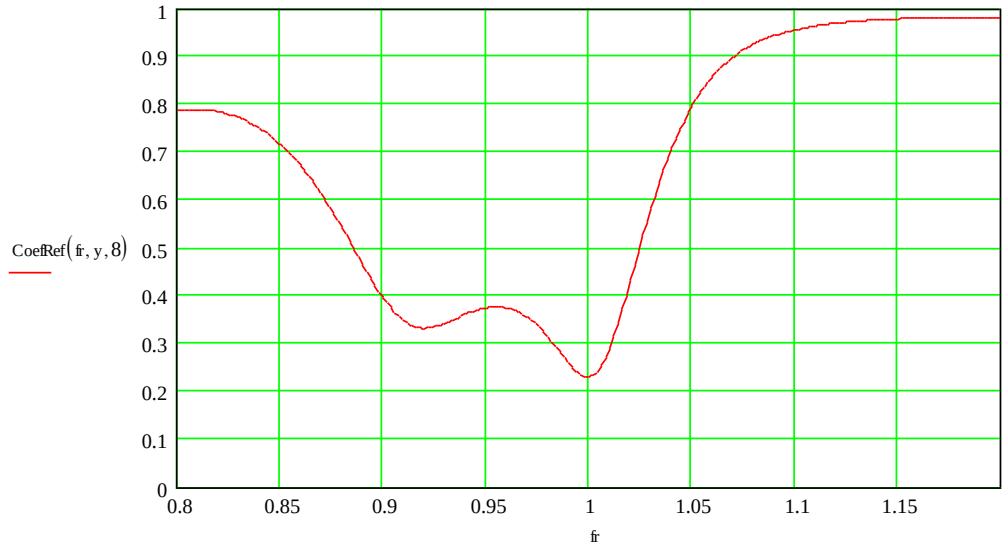


Figura 76

La posibilidad de realizar estas operaciones iterativas a gran velocidad permite abordar problemas muy complejos bajo un enfoque de optimización. En el siguiente problema se describe un algoritmo para obtener un filtro pasabanda, con una máscara especificada, en base a un arreglo de 9 stubs, partiendo de una carga con un coeficiente de reflexión de 0.7. Se define una función objetivo como la desviación cuadrática de la respuesta respecto a la máscara, utilizando la operación de integración del software MathCad. Asimismo se utiliza la función Minimize(object,y) del propio software. Las figuras muestran la respuesta del filtro antes de la optimización, la construcción de la función objetivo, la minimización y la respuesta resultante después de la optimización.

El valor de la carga se escogió bastante alto (0.7) para mostrar el compromiso que logra el algoritmo al bajar el coeficiente de reflexión a menos de 0.26 en el ancho de banda de interés. Con una carga de 0.5, se logra bajar el mismo a menos de 0.08 en la banda pasante.

|a|

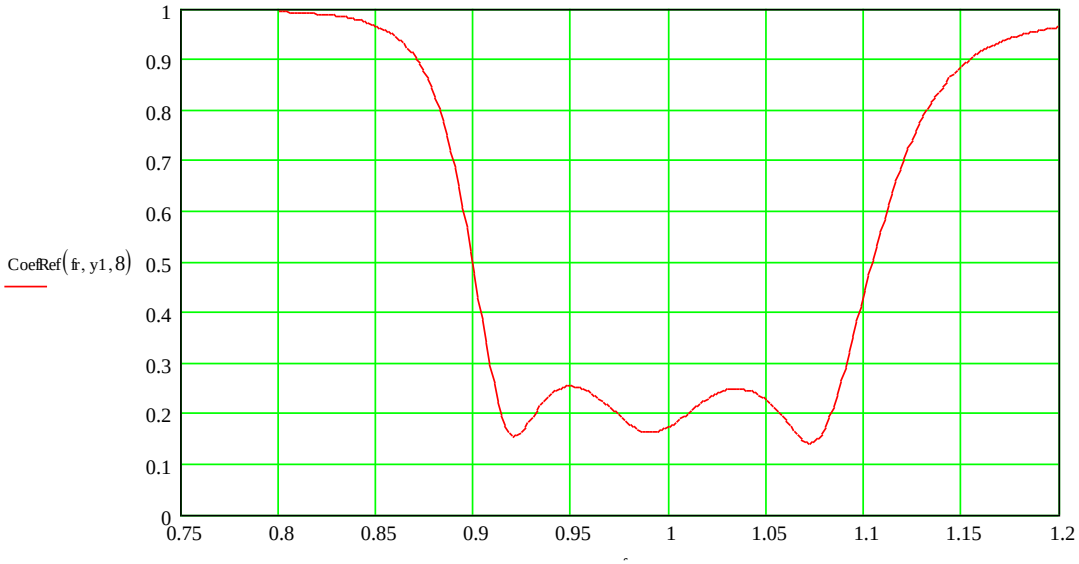


$$object(y) := \int_{0.90}^{1.10} (CoefRef(fr, y, 8))^2 \, dfr$$

Given

$y > 0 \qquad y < 0.5$

$$y1 := Minimize(object, y) = \begin{pmatrix} 0.2281 \\ 0.1509 \\ 0.2039 \\ 0.1866 \\ 0.2272 \\ 0.0875 \\ 0.1886 \\ 0.0702 \\ 0.1252 \end{pmatrix}$$



Capítulo 4. Parámetros de Dispersión

4-1 Parámetros de Dispersión

Hasta el momento se ha estado trabajando con tensiones y corrientes (para el caso de líneas de transmisión) o campos eléctricos y magnéticos (para el caso de guías de ondas). De hecho, en una sección anterior se definieron tensiones y corrientes ficticias, proporcionales a los campos transversales, que permiten utilizar en guías de ondas las herramientas desarrolladas para líneas de transmisión. Sin embargo, aunque tales tensiones y corrientes ficticias permiten extender los conceptos de líneas de transmisión a las guías de onda aún son dependientes de magnitudes que no pueden ser medidas directamente. En particular, si bien es cierto que a través de una sonda puede estudiarse el comportamiento del campo transversal a lo largo de la longitud de la guía, el valor absoluto del campo no es posible medirlo, quedando indeterminado por un factor de proporcionalidad que depende de la forma y dimensiones de la sonda, eficiencia de los diodos rectificadores, etc. En esta sección se presentarán nuevas variables ficticias (tensiones y corrientes normalizadas) que permiten continuar usando los conceptos desarrollados anteriormente para líneas de transmisión, pero que adicionalmente pueden ser relacionados con magnitudes medibles en guías de ondas como es el caso de potencia transmitida o disipada en una carga. Más aún, la utilización de estas nuevas variables permite extrapolar los conceptos al caso de redes de múltiples puertos, interconexiones de componentes y dispositivos activos. Las variables normalizadas (tensiones y corrientes) recibirán el nombre genérico de parámetros de dispersión y, como se verá más adelante, tienen dimensiones de $[\text{Volt-Amper}]^{1/2}$.

El concepto de parámetros de dispersión se desarrollará partiendo de redes de parámetros concentrados y será luego extrapolado al caso distribuido cuando se represente a una línea de transmisión o una guía de ondas por un cuadripolo adecuado. En este sentido los parámetros de dispersión constituyen un conjunto de variables que determinan completamente una red, de igual forma que las corrientes o tensiones en la misma; de hecho son obtenidos a partir de estas últimas a través de combinaciones lineales y por tanto contienen la misma información acerca de la red. Por otra parte, a diferencia de los parámetros de cortocircuito o circuito abierto, la matriz de dispersión siempre existe: en el caso de una red constituida exclusivamente por una impedancia serie no existe la matriz de impedancia, y viceversa, en una red constituida solamente por una admitancia en paralelo no existe la matriz admitancia. Sin embargo, aún en estos casos siempre es posible hallar la matriz de dispersión.

El siguiente esquema representa a un circuito constituido por un generador con impedancia de

salida R_g alimentando a una carga (que a su vez puede contener generadores internos). En esta figura y en el resto de la discusión las variables subrayadas o en MAYÚSCULAS representan magnitudes no normalizadas, por comodidad en el tratamiento de las expresiones normalizadas que serán de uso más común.

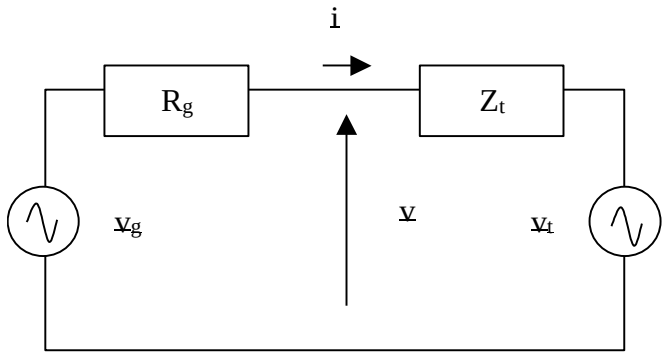


Figura 77

La corriente que circula por el circuito es

$$\underline{i} = \frac{\underline{v}_g - \underline{v}_t}{R_g + Z_t} \qquad (4.1)$$

El voltaje en los terminales de la carga es:

$$\underline{v} = Z_t \ \underline{i} + \underline{v}_t = Z_t \frac{\underline{v}_g - \underline{v}_t}{R_g + Z_t} + \underline{v}_t \qquad (4.2)$$

A continuación se efectuará una normalización de las tensiones y corrientes de acuerdo a las siguientes transformaciones:

$$v = \frac{\underline{v}}{\sqrt{R_0}} \qquad \text{e} \qquad i = \underline{i}\ \sqrt{R_0} \qquad (4.3)$$

donde v e i son cualquiera de las tensiones o corrientes a normalizar y R_0, la resistencia de normalización, tiene un valor arbitrario que se escogerá en forma apropiada para simplificar los cálculos. De igual manera las impedancias serán normalizadas de acuerdo a:

$$z = \frac{Z}{R_0} \qquad (4.4)$$

Es importante notar que, de acuerdo a esta normalización, las tensiones y corrientes tienen las mismas dimensiones, es decir, [volt-Amper]1/2. Las impedancias normalizadas son adimensionales. A continuación se definirán dos nuevas cantidades obtenidas por combinación lineal de las tensiones y corrientes normalizadas:

$$a = \frac{1}{2}(v + i) = \frac{1}{2}\left(\frac{\underline{v}}{\sqrt{R_0}} + \underline{i}\sqrt{R_0} \right)$$
$$b = \frac{1}{2}(v - i) = \frac{1}{2}\left(\frac{\underline{v}}{\sqrt{R_0}} - \underline{i}\sqrt{R_0} \right) \qquad (4.5)$$

Como se demostrará más adelante, los **parámetros de dispersión a y b** están relacionados con el flujo de potencia desde y hacia el generador. A continuación se relacionará el parámetro a con los elementos constitutivos de la red.

$$a = \frac{1}{2}(v + i) = \frac{1}{2}\left(\frac{\underline{v}}{\sqrt{R_0}} + \underline{i}\sqrt{R_0} \right) = \frac{1}{2}\left(\frac{Z_t}{\sqrt{R_0}} \frac{\underline{v}_g - \underline{v}_t}{R_g + Z_t} + \frac{\underline{v}_t}{\sqrt{R_0}} + \frac{\underline{v}_g - \underline{v}_t}{R_g + Z_t}\sqrt{R_0} \right) =$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{R_0}}\left(Z_t \frac{\underline{v}_g}{R_g + Z_t} - Z_t \frac{\underline{v}_t}{R_g + Z_t} + \underline{v}_t + \frac{\underline{v}_g R_0}{R_g + Z_t} - \frac{\underline{v}_t R_0}{R_g + Z_t} \right) =$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{R_0}}\left(\frac{\underline{v}_g (R_0 + Z_t)}{R_g + Z_t} + \left(1 - \frac{R_0}{R_g + Z_t} - \frac{Z_t}{R_g + Z_t} \right)\underline{v}_t \right)$$

Finalmente se obtiene:

$$a = \frac{1}{2\sqrt{R_0}}\left(\frac{\underline{v}_g (R_0 + Z_t)}{R_g + Z_t} + \left(\frac{R_g - R_0}{R_g + Z_t} \right)\underline{v}_t \right) \qquad (4.6)$$

Al efectuar la normalización, se obtiene como expresión final:

$$a = \frac{1}{2}\left(\frac{v_g (z + 1) + v_t (r_g - 1)}{r_g + z} \right) \qquad (4.7)$$

De manera similar se obtiene:

$$b = \frac{1}{2}\left(\frac{v_g (z - 1) + v_t (r_g + 1)}{r_g + z} \right) \qquad (4.8)$$

A continuación se definirá un nuevo parámetro de dispersión, S, como:

$$S = \frac{b}{a} = \frac{v_g(z-1) + v_t(r_g+1)}{v_g(z+1) + v_t(r_g-1)} \qquad (4.9)$$

4.1.1 Casos particulares

Para comprender mejor el significado del parámetro S se estudiarán a continuación varios casos particulares

a) $v_t=0$

$$S = \frac{b}{a} = \frac{z-1}{z+1} = \Gamma \qquad (4.10)$$

En este caso se observa que el parámetro de dispersión S coincide con el coeficiente de reflexión estudiado previamente.

b) $r_g=1$ ("generador acoplado")

$$a = \frac{v_g}{2} \qquad (4.11)$$

$$S = \frac{b}{a} = \frac{v_g(z-1) + 2v_t}{v_g(z+1)} = \Gamma + \frac{2\,v_t}{v_g(z+1)} = \Gamma + \frac{2}{z+1}\frac{v_t}{v_g} \qquad (4.12)$$

c) $z=1$ ("carga acoplada")

$$b = \frac{v_t}{2}$$

$$a = \frac{1}{2}\frac{2\,v_g}{r_g+1} + \frac{r_g-1}{r_g+1}\frac{v_t}{2} \qquad (4.13)$$

Si, adicionalmente, se hace $v_t=0$ entonces:

$$a = \frac{v_g}{r_g+1} \qquad \text{y} \qquad b = 0 \qquad (4.14)$$

Seguidamente se examinará de nuevo el caso (b) ("generador acoplado"). El parámetro b vale:

$$b = \frac{1}{2}\frac{v_g(z-1)+2v_t}{1+z} = \frac{1}{2}\left(v_g\Gamma + \frac{2v_t}{1+z}\right) = a\,\Gamma + \frac{v_t}{1+z} \qquad (4.15)$$

Esto quiere decir que, la "onda reflejada" desde la carga hacia el generador está constituida por una parte debida al desacoplamiento de impedancia, más una contribución debida a las fuentes internas que puedan existir dentro de la carga.

4.1.2 La carga como generador

En muchas ocasiones interesa conocer los parámetros de dispersión de ciertas redes terminadas en una carga. En estos casos la energía reflejada desde la carga estará entrando a la red y por tanto la carga se estará comportando como un generador. Para relacionar los parámetros a y b de la carga con los del generador equivalente a´ y b´ se aplican las relaciones fundamentales en el siguiente circuito:

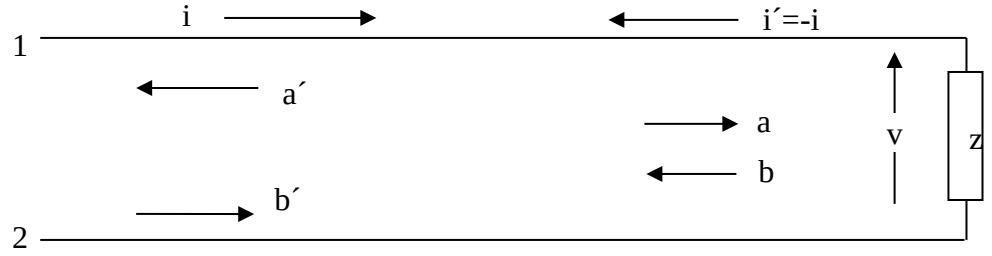


Figura 78

Del mismo se obtiene:

$$a' = \frac{1}{2}(v+i') = \frac{1}{2}(v-i) = b$$
$$b' = \frac{1}{2}(v-i') = \frac{1}{2}(v+i) = a \qquad (4.16)$$

$$a' = \frac{1}{2}(v-i) = \frac{v}{2}\left(1-\frac{1}{z}\right)$$
$$b' = \frac{1}{2}(v+i) = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{z}\right) \qquad (4.17)$$

Por lo tanto, cuando la carga (que ahora es generador) está acoplada (z=1) la tensión incidente desde la carga es cero. En cualquier caso:

$$\frac{b'}{a'} = \frac{a}{b} = \frac{1}{\Gamma} \tag{4.18}$$

4.1.3 Potencia aparente

La potencia aparente transferida es el producto

$$W = \underline{V} \cdot \underline{I}^* = P + jQ$$

Al sustituir las tensiones y corrientes por los valores normalizados se obtiene:

$$W = v\sqrt{R_0} \cdot \frac{i^*}{\sqrt{R_0}} = v \cdot i^* \tag{4.19}$$

Ahora se sustituyen v e i por los parámetros de dispersión:

$$W = (a+b)\cdot(a-b)^* = (a+b)\cdot(a^* - b^*) =$$
$$= |a|^2 - |b|^2 + a^*b - b^*a = |a|^2 - |b|^2 + 2j\ \mathrm{Im}(a^*b)$$

De aquí se obtiene que la potencia activa es

$$P = |a|^2 - |b|^2 = |a|^2 \left(1 - |S|^2\right) \tag{4.20}$$

De igual manera, la potencia incidente es

$$P_i = |a|^2 \tag{4.21}$$

y la reflejada es:

$$P_r = |b|^2 \tag{4.22}$$

4.1.4 Significado físico de la normalización

En primer lugar considérese una red sin normalizar

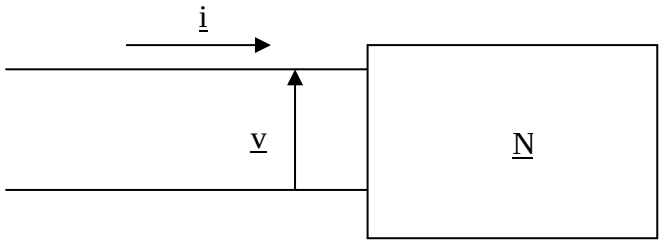


Figura 79. Red de un puerto sin normalizar

El efecto de normalizar una red tal que:

$$v = \frac{\underline{v}}{\sqrt{R_0}} \qquad \text{y} \qquad i = \sqrt{R_0}\ \underline{i} \tag{4.23}$$

Esto resulta equivalente a poner un transformador de valor $1:\sqrt{R_0}$

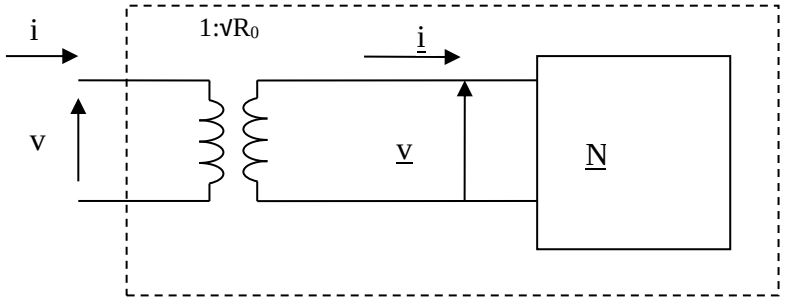


Figura 80. Red de un puerto normalizada utilizando un transformador de relación $1:\sqrt{R_0}$

Esto se puede interpretar de la siguiente manera: en la teoría de parámetros de dispersión, la normalización de una red es equivalente a poner un transformador a la entrada.

4.1.5 Matriz admitancia aumentada

En muchos casos prácticos el cálculo de los parámetros de dispersión se simplifica por medio del uso de la red aumentada: ésta es una red definida a partir de la red normalizada al agregarle una resistencia de valor 1 y equivale a incorporar la impedancia del generador en la red original.

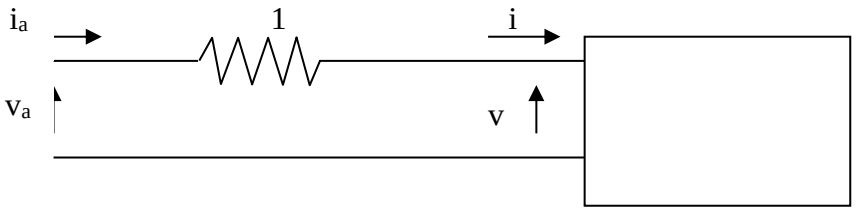


Figura 81 Red normalizada aumentada

La admitancia de entrada vale

$$y_a = \frac{i_a}{v_a} = \frac{i}{v+1} \tag{4.24}$$

Adicionalmente

$$1 - 2y_a = \frac{v+i-2i}{v+i} = \frac{v-i}{v+i} = S$$

En algunos casos resulta sencillo calcular la admitancia de red aumentada y hacer cumplir la igualdad:

$$S = 1 - 2y_a \qquad (4.25)$$

4.1.6 Ejemplos de cálculo

Una carga de 100 Ohms consume 1 Watt cuando se alimenta con un generador de impedancia 50 Ohms y tensión en vacío desconocida pero constante e independiente de la carga. Calcule:

a) Potencia incidente
b) Potencia Reflejada
c) Coeficiente de Reflexión
d) Tensión en vacío
e) Potencia que se consumiría si en lugar de 100 Ohms se tienen 50 Ohms.

Como la potencia disipada es 1 Watt se tiene que:

$$1\, w = |a|^2 - |b^2|$$

Por otra parte,

$$S = \frac{b}{a} = \frac{z-1}{z+1} = \frac{100-50}{100+50} = \frac{50}{150} = \frac{1}{3} = 0{,}3333$$

$$b = \frac{a}{3}$$

Al sustituir en la primera expresión se tiene:

$$1\, w = |a|^2 - \frac{|a|^2}{9} = \frac{8}{9}|a|^2$$

Por tanto, |a|=1,0607

La potencia incidente es:

$$P_i = |a|^2 = 1{,}125\ watts$$

y la reflejada es:

$$P_r = |b|^2 = \frac{1}{9}|a|^2 = 0{,}125\ watts$$

La potencia disipada es la diferencia: $P_d = P_i - P_r = 1$ watt

Si se asume que v_g es constante e independiente de la carga se tiene:

$$a = \frac{v_g}{2} \quad \Rightarrow \; v_g = 2\,a = 2\,\sqrt{1{,}125}$$

Por último, al acoplar se tiene que S=0 y b=0, por lo tanto: $P_d=P_i=1{,}125$ Watts y $P_r=0$.

4.1.7 Otro ejemplo: El puente de Wheatstone

Un puente de Wheatstone es un circuito que permite obtener de manera sencilla los parámetros de dispersión en redes prácticas. El esquema circuital es el siguiente:

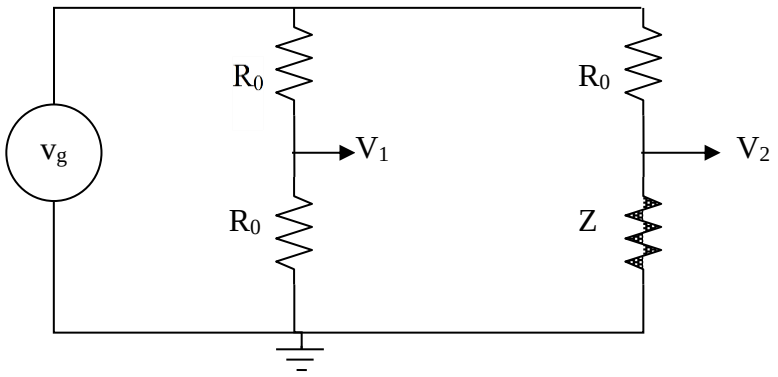


Figura 82

Por tratarse de dos divisores de tensión es fácil ver que las tensiones V_1 y V_2 son respectivamente:

$$V_1 = \frac{v_g}{2} \qquad y \qquad V_2 = v_g\,\frac{Z}{Z+R_0}$$

La diferencia vale:

$$V_2 - V_1 = v_g\left(\frac{Z}{Z+R_0} - \frac{1}{2}\right) = \frac{v_g}{2}\,\frac{Z-R_0}{Z+R_0}$$

A simple vista se aprecia que V_1 es equivalente al parámetro de dispersión “a” en la condición de “generador acoplado”. La diferencia es el parámetro “b” y la fracción de la derecha es el parámetro “S”. Finalmente, se tiene la suma

$$V_2 - V_1 + V_1 = V_2 = \frac{v_g}{2}\,\frac{Z-R_0}{Z+R_0} + \frac{v_g}{2} = v_g\,\frac{Z}{Z+R_0} \Rightarrow b + a = v$$

Es decir que V_2 equivale a la tensión en la carga. Es importante destacar que se ha utilizado el vocablo “equivale” por cuanto no se puede establecer una igualdad por tratarse de cantidades con unidades diferentes. El factor de proporcionalidad es precisamente la Resistencia de normalización, que en este caso se escogió igual a R_0. Este circuito se puede emplear para medir

el coeficiente de reflexión de una carga cualquiera en líneas de transmisión y ayudar en el proceso de acoplamiento. Si se llevan las salidas V_1 y V_2 a diodos rectificadores se tendrán corrientes proporcionales a la tensión incidente y a la tensión en la carga; la diferencia será proporcional a la tensión reflejada. Manipulando el circuito de acoplamiento ("matching box") se busca minimizar la tensión reflejada. Se puede utilizar a todas las frecuencias, pero en frecuencias muy altas se debe tener cuidado de fabricarlo en circuitos impresos de baja capacitancia que introduzcan imprecisiones en la medida.

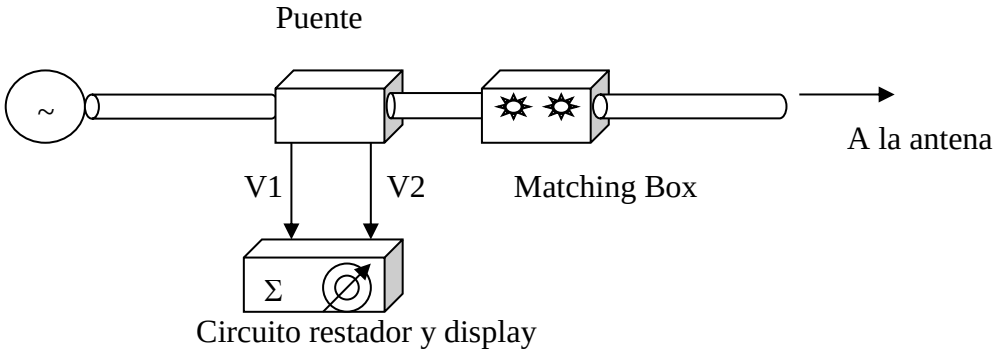
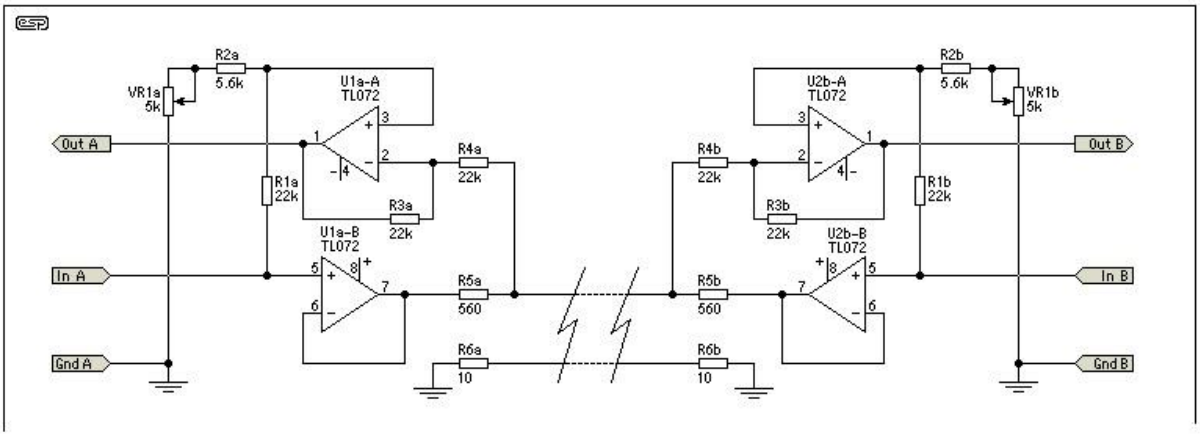


Figura 83

Una vez que se haya logrado el acoplamiento el puente debe retirarse para que no haya consumo innecesario de potencia en las resistencias del circuito. Si se desea tener una lectura continua de la potencia incidente y la reflejada deben utilizarse acopladores direccionales que toman sólo una pequeña muestra de las ondas viajeras y por tanto no consumen demasiada potencia del transmisor.

A frecuencia bajas también se utiliza este circuito en aplicaciones tales como el "circuito antilocal" de los teléfonos. El micrófono toma el lugar del generador y el audífono se coloca en la rama diferencial. Si la impedancia de la línea telefónica fuera igual a la resistencia R_0 del puente, entonces no habría reflexiones y se evitaría escuchar en el audífono la propia voz; sólo se recibe la voz de la otra persona porque viene en la dirección contraria. La pérdida de potencia debido a la disipación se compensa con los amplificadores de que están dotados los teléfonos modernos. Un circuito similar se halla del lado de la central telefónica y se denomina "Híbrido" o "Convertidor de 2 a 4 hilos" y su función es separar ambas direcciones de la comunicación que transita por el bucle del usuario para su procesamiento dentro de la central.



En este circuito el primer divisor de tensión está constituido por la combinación VR1a y R2a en serie con el paralelo de R1a con R4a. La otra rama está constituida por R5a en serie con la impedancia de entrada de la línea telefónica (aproximadamente 600 Ohms).

4.2 Redes de N puertos

4.2.1 Representación de una red de N puertos

Las definiciones vistas anteriormente para redes de un puerto pueden extenderse a una red de N puertos empleando la teoría de matrices en lugar de los escalares que se usaron en redes 1 puerto. En primer lugar, se considerará una red pasiva de N puertos, la cual puede tener o no matriz Z o Y. En cada uno de los puertos las tensiones y corrientes pueden ser representadas como se muestra a continuación:

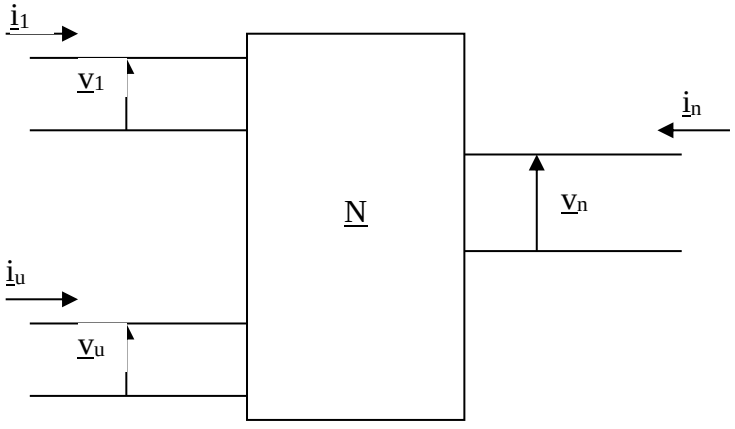


Figura 84 Red de N puertos sin normalizar

Si se escogen N impedancias de normalización (no necesariamente iguales entre sí), será posible definir tensiones y corrientes normalizadas para cada puerto. Si se extienden los conceptos

anteriores a cada uno de los puertos se podrán definir tensiones incidentes y reflejadas, es decir:

$$a_u = \frac{1}{2}(v_u + i_u)$$

$$b_u = \frac{1}{2}(v_u - i_u) \qquad \text{para u variando de 1 a N}$$

Si se asume que las excitaciones a los puertos son fuentes de corriente, entonces las tensiones se relacionan con las variables independientes a través de la matriz Z. De manera similar, si se consideran a las tensiones como las variables independientes entonces las corrientes se hallan a través de la matriz Y.

De manera similar, los parámetros de dispersión **a** y **b** estarán relacionados a través de una matriz cuadrada. En este caso las excitaciones serán un conjunto de generadores acoplados a cada uno de los puertos: Se conectarán N generadores de tensión, cada uno a un puerto de la red, con impedancias de salida iguales a la impedancia de normalización del puerto respectivo. Si se hace este procedimiento, la red resulta similar a una red aumentada donde la matriz $[\underline{Y}_A]$ siempre existe.

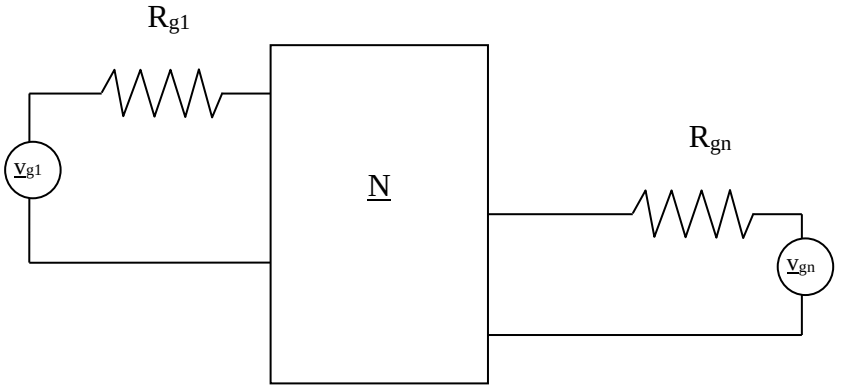


Figura 85 Red N aumentada

La matriz columna [I], de corrientes que entran a cada puerto, es igual a:

$$[\underline{I}] = [\underline{Y}_A]\,[\underline{v}_g] \qquad (4.26)$$

donde $\underline{v}_g$ es la matriz de tensiones de los generadores. La normalización puerto por puerto es:

$$v_{gu} = R_{0u}^{-1/2}\ \underline{v}_{gu} \qquad (4.27)$$

o, en forma matricial:

$$[v_g] = [R_0]^{-1/2} [\underline{v}_g] \qquad (4.28)$$

donde R_0 es una matriz diagonal, y las v´s son matrices columna que representan respectivamente tensiones normalizadas y tensiones no normalizadas.

$$[i] = [R_0]^{1/2}[\underline{I}] = [R_0]^{1/2} [\underline{Y}_A][\underline{v}_g]$$

$$[i] = [R_0]^{1/2}[\underline{Y}_A][R_0]^{1/2}[v_g]$$

$$[y_a] = [R_0]^{1/2}[\underline{Y}_A][R_0]^{1/2}$$

$$[i] = [y_a][v_g] \qquad (4.29)$$

En estas expresiones y_a es la matriz N x N de la admitancia aumentada y normalizada de la red de N-puertos. Cuando se seleccionan las $R_{gu}=R_{0u}$ para cualquier puerto, se cumple que:

$$a_u = \frac{v_{gu}}{2} \qquad (4.30)$$

Asimismo, de la definición de los parámetros de dispersión para cada puerto se tiene que:

$$i_u = a_u - b_u \qquad (4.31)$$

Entonces, y generalizando para todos los puertos, se tiene que:

$$[a] - [b] = [y_a][v_g] = 2[y_a][a]$$
$$[b] = [a] - 2[y_a][a]$$
$$[b] = ([E] - 2[y_a])[a]$$

Por consiguiente,

$$[S] = [E] - 2[y_a] \qquad (4.32)$$

donde E es la matriz unitaria (sólo contiene 1 en la diagonal principal).

4.2.2 Redes de 2 puertos

Para la descripción de un puerto se usó la igualdad:

$$b = S \cdot a$$

en tanto que en redes de N-puertos se usa la expresión matricial:

$$[b]=[S]\,[a] \qquad (4.33)$$

donde [b]y [a] son matrices columna. En el caso de dos puertos se tiene:

$$\begin{aligned} b_1 &= S_{11}\, a_1 + S_{12}\, a_2 \\ b_2 &= S_{21} a_1 + S_{22}\, a_2 \end{aligned} \qquad (4.34)$$

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \qquad (4.35)$$

Si se coloca en el puerto 2 una impedancia de modo tal que no exista reflexión, es decir que se acopla al puerto 2, se tiene que:

$$a_2 = 0 \qquad y \qquad \left.\frac{b_1}{a_1}\right|_{a_2=0} = S_{11} = \Gamma_1$$

Asimismo,

$$b_2 = S_{21}\, a_1 \qquad y \qquad \left.\frac{b_2}{a_1}\right|_{a_2=0} = S_{21}$$

En estas expresiones, a_1 es proporcional a la potencia incidente en el puerto 1 y b_2 a la potencia que sale del puerto 2, de manera que:

$$P_{out} = |b_2|^2 \qquad y \qquad P_{in} = |a_1|^2 \qquad (4.36)$$

$$\frac{P_{out}}{P_{in}} = \frac{|b_2|^2}{|a_1|^2} = |S_{21}|^2 \qquad (4.37)$$

lo cual indica una clase de eficiencia en el sistema de dos puertos. El mismo razonamiento se aplica a los parámetros restantes.

Ejemplo de cálculo. Caso 1

Hallar la matriz S de un trozo de línea de transmisión. Se supone que todas las líneas tienen la misma impedancia característica.

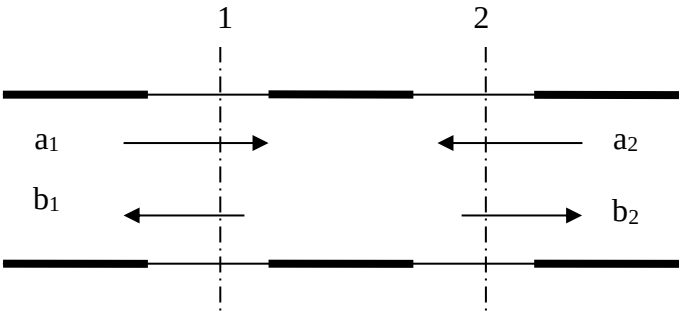


Figura 86 Parámetros de dispersión de un trozo de línea de transmisión

Al aplicar el método descrito en el punto anterior se tiene

$$S_{11} = \frac{b_1}{a_1} = 0 \text{ porque } b_1 = 0 \text{ ya que la red está acoplada en ambos puertos}$$

De igual manera se obtiene que S_{22}=0

Si θ es la longitud eléctrica del trozo de línea, entonces, y bajo condición de acoplamiento:

$$b_2 = a_1 e^{-j\theta} \quad \text{y} \quad b_1 = a_2 e^{-j\theta}$$

de manera que,

$$S_{12} = \frac{b_1}{a_2} = e^{-j\theta} \qquad \text{y} \qquad S_{21} = \frac{b_2}{a_1} = e^{-j\theta}$$

por tanto

$$S = \begin{bmatrix} 0 & e^{-j\theta} \\ e^{-j\theta} & 0 \end{bmatrix}$$

Ejemplo de cálculo. Caso 2

Líneas de impedancia característica diferente:

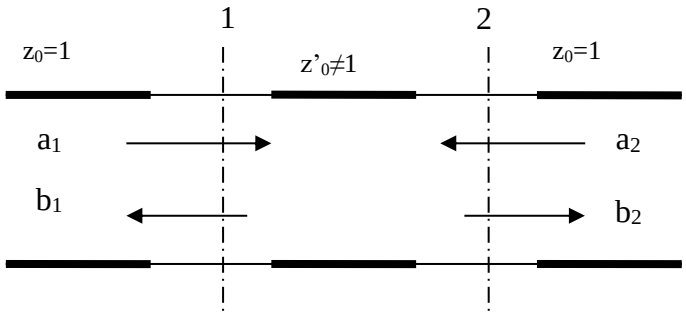


Figura 87

A primera vista parecería ser el mismo caso anterior. Sin embargo, el hecho de z'_0 sea diferente de z_0 produce una reflexión en el puerto 2 que da origen a un patrón de ondas estacionario en la

línea intermedia, de manera que en el puerto 1 b1 será diferente de cero, y por tanto también el S11.
Para acoplar el puerto 2, se coloca una carga de valor 1+j0. Sin embargo, en la línea intermedia se produce una reflexión

$$\Gamma_2 = \frac{1 - z_0'}{1 + z_0'}$$

En el puerto 1 se tiene que esta reflexión vale

$$\Gamma_1 = \Gamma_2 \, e^{-2j\theta}$$

La impedancia correspondiente, desnormalizada, vale

$$z_1 = z_0' \, \frac{1 + \Gamma_1}{1 - \Gamma_1}$$

Finalmente, el valor de S_{11} vale

$$S_{11} = \frac{z_1 - 1}{z_1 + 1}$$

Este parámetro vale finalmente:

$$S_{11} = \frac{\frac{z_0' - 1}{z_0' + 1}\left(1 - e^{-2j\theta}\right)}{1 - \left(\frac{z_0' - 1}{z_0' + 1}\right)^2 e^{-2j\theta}}$$

$$S_{11} = \frac{\left(1 - e^{-2j\theta}\right)}{\left(\frac{z_0' + 1}{z_0' - 1}\right) - \left(\frac{z_0' - 1}{z_0' + 1}\right) e^{-2j\theta}}$$

Se puede observar que este caso se reduce al anterior cuando z'_0 es igual 1, en cuyo caso S_{11} valdrá 0. De igual manera, si la línea tiene una longitud múltiplo de media longitud de onda, $\theta = n\pi$, por lo que $S_{11}=0$

En el caso particular de que θ valga $\pi/2$, entonces la formula se reduce a

$$S_{11} = \frac{(z_0')^2 - 1}{(z_0')^2 + 1}$$

Si se tratase de un acoplador $\lambda/4$, el valor de z_0' se escoge igual a $\sqrt{ROE}$ por lo que

$$S_{11} = \frac{ROE - 1}{ROE + 1} = \rho$$

el cuál es el módulo del coeficiente de reflexión de la carga no acoplada.

Ejemplo de cálculo. Caso 3

Considérese la siguiente red, constituida por un trozo de línea de largo eléctrico θ_1 y conectada

en un extremo a un stub de largo θ_2.

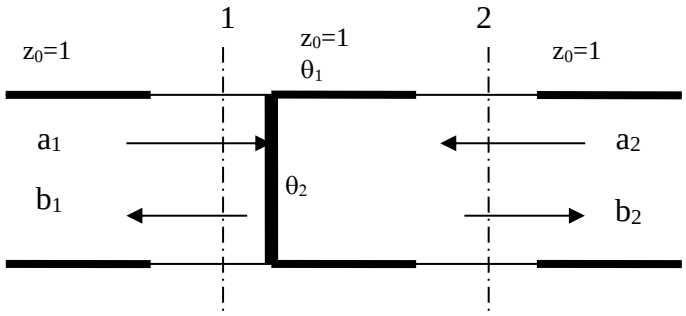


Figura 88

Se comienza acoplando el puerto 2. La admitancia total en el puerto 1 será la suma de la admitancia reflejada del puerto 2 (que es uno) y la del stub

$$y_1 = 1 - j\cot\theta_2$$

El coeficiente de reflexión Γ_1 visto en este puerto vale:

$$\Gamma_1 = \frac{1 - y_1}{1 + y_1} = \frac{j\cot\theta_2}{2 - j\cot\theta_2}$$

Por la definición dada anteriormente, este valor corresponde a S_{11}.

La tensión incidente en la línea intermedia vale $1+\Gamma_1$, y al propagarse al puerto 2 sufre un retraso de θ_1 grados eléctricos. Por la definición este valor corresponderá a S_{21}.

$$S_{21} = (1 + \Gamma_1)\, e^{-j\,\theta_1}$$

El siguiente paso es acoplar el puerto 1 y obtener el coeficiente de reflexión visto desde el puerto 2. Como se ha colocado una admitancia de valor 1 en el puerto 1, la admitancia total vista en este puerto coincide con el y_1 calculado anteriormente, y el coeficiente de reflexión tendrá el mismo valor ya calculado Γ_1.

Cuando este coeficiente de reflexión se observa desde el puerto 2 va estar afectado de un desfasaje igual al doble de θ_1. Entonces:

$$S_{22} = \Gamma_1\, e^{-j\,2\,\theta_1}$$

Finalmente, la tensión que incide en el puerto 2 se propaga libremente al puerto 1 donde se modifica por la presencia del stub.

$$S_{12} = e^{-j\,\theta_1}\,(1 + \Gamma_1)$$

El siguiente ejemplo numérico considera que la línea intermedia tiene un largo de 0,12 λ, es

decir, 43,2° y que el stub tiene un largo de 0,05 λ o 18°.

Sustituyendo estos valores se obtiene:

$$S = \begin{bmatrix} 0{,}8385\angle 146{,}98° & 0{,}5498\angle 13{,}80° \\ 0{,}5498\angle 13{,}80° & 0{,}8385\angle 60{,}58° \end{bmatrix}$$

4.3 Potencia Transferida en una Red de N-puertos

Las ecuaciones para la red pasiva de N-puertos se pueden expresar en forma parámetros de dispersión de una forma similar a la usada para redes de un puerto.

El punto de partida será una red pasiva de N-puertos con cargas pasivas y generadores con impedancias reales conectadas a través de los puertos como se muestra a continuación:

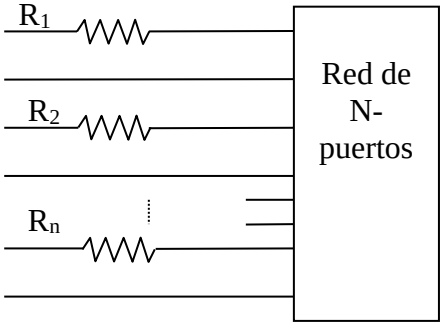


Figura 89

La potencia que entra al puerto k es P_k, la cual es la diferencia de P_{ik} y P_{rk}, las potencias incidente y reflejada respectivamente, es decir:

$$P_k = P_{ik} - P_{rk} \qquad (4.38)$$

Por definición, las potencias incidente y reflejada son:

$$P_{ik} = a_k^* \, a_k \qquad \text{y} \qquad P_{rk} = b_k^* \, b_k$$

Entonces

$$P_k = a_k^* \, a_k - b_k^* \, b_k \qquad (4.39)$$

La potencia total que entra en los N puertos será:

$$P = \sum_1^N a_k^* \, a_k - b_k^* \, b_k \qquad (4.40)$$

Esto se puede expresar matricialmente como:

$$P = [\tilde{a}][a] - [\tilde{b}][b] \qquad (4.41)$$

donde se ha definido $[\tilde{a}] = [a]^{t*}$ que es la matriz [a], transpuesta y conjugada. Por medio de las reglas del álgebra matricial se obtiene:

[b] = [S] [a]

$[\tilde{b}] = [\tilde{a}][\tilde{S}]$

Al sustituir en la expresión de la potencia se obtiene:

$$P = [\tilde{a}][a] - [\tilde{a}][\tilde{S}][S][a] = [\tilde{a}]([E] - [\tilde{S}][S])[a] = [\tilde{a}][Q][a]$$

La matriz Q se ha definido como:

$$[Q] = [E] - [\tilde{S}][S] \qquad (4.42)$$

A [Q] se le conoce como matriz de disipación y en el caso de redes pasivas debe ser definida positiva (DP), es decir, |Q| > 0, o semidefinida positiva (SDPO), |Q|≥0. En el caso de redes pasivas sin pérdidas |Q|=0. Asimismo, se puede demostrar que Q es una matriz hermética, es decir $Q_{ij}^{*} = Q_{ji}$.

4.3.1 Redes sin pérdidas

Cuando una red es sin pérdidas se debe establecer que toda la potencia que entra es igual a la que sale por cuanto nada se consume en su interior. Esto es P=0. Por tanto, si $P = [\tilde{a}][Q][a] = 0$ debe ser que [Q]=0 y en consecuencia $[\tilde{S}][S] = [E]$, lo cual se conoce como la condición unitaria de la matriz de disipación.

4.3.2 La condición unitaria en redes de dos puertos

Un caso particular de gran importancia es el de las redes de dos puertos sin pérdidas. Muchos componentes de microondas caen dentro de esta categoría, en particular los filtros.

La condición unitaria se deriva del hecho de que la matriz de disipación debe ser cero pues la red es pasiva y sin pérdidas. Por tanto, $[\tilde{S}][S] = [E]$. Al desarrollar este producto se tiene

$$\begin{bmatrix} S_{11}^{*} & S_{21}^{*} \\ S_{12}^{*} & S_{22}^{*} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

De aquí se obtiene finalmente

$$S_{11}^2 + S_{21}^2 = 1$$
$$S_{22}^2 + S_{12}^2 = 1 \qquad (4.43)$$
$$S_{11}^* S_{12} + S_{21}^* S_{22} = 0$$

Las primeras dos expresiones indican que la potencia transferida al otro puerto es simplemente la diferencia de la potencia incidente y la reflejada, como es de esperarse. Si el componente es un filtro todos los parámetros de dispersión varían con la frecuencia y se podrán sacar las siguientes conclusiones:

a) En la banda pasante la potencia transferida es máxima y por tanto el coeficiente de reflexión a la entrada en mínimo.

b) En la banda de rechazo casi no hay potencia transferida a la carga y por tanto el coeficiente de reflexión es cercano a la unidad.

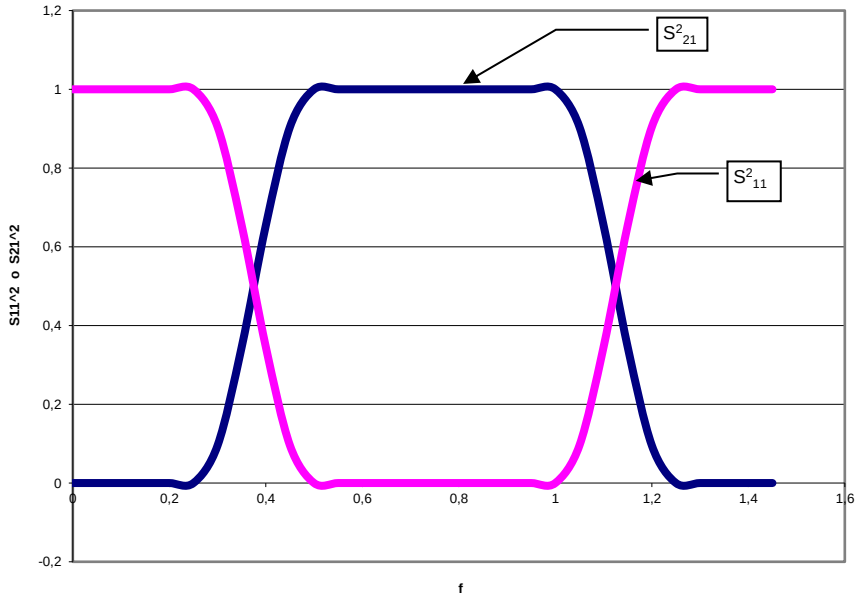


Figura 90. Respuesta de frecuencia de un filtro pasabanda

4.3.3 Redes Simétricas

Muchas de las componentes de microondas son simétricas en el espacio, teniendo gracias a su simetría aplicaciones muy especiales en los sistemas de comunicaciones. Tales propiedades, o las de la matriz S que las contiene, pueden ser obtenidas a través de la matriz de geometría o de simetría [G]. Algunas aplicaciones se hallan en uniones de dos puertos, discontinuidades en guías de onda, uniones T o Y, acopladores direccionales, etc.

Para considerar las propiedades de simetría se estudiará en primer lugar una estructura en cuyo interior existe un campo electromagnético. Las soluciones de las ecuaciones de Maxwell dependen únicamente del medio de transmisión, la frecuencia y las condiciones de borde, pero son independientes del sistema de coordenadas utilizadas en la descripción del sistema. Debido a esto la estructura se puede rotar o trasladar a otra posición sin que se altere el campo en su interior. Más aún, ciertas estructuras como la de la figura pueden rotarse alrededor de ciertos "ejes de simetría" sin que se observe ningún cambio en la misma; en el mostrado la figura puede rotarse 180º sobre el eje de simetría sin que se note el cambio (la marca "x" se utiliza sólo para identificar a uno de los puertos).

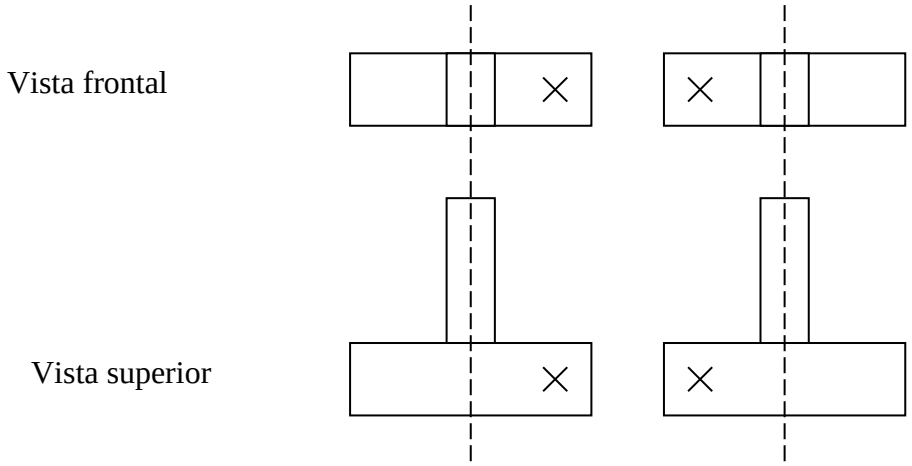


Figura 91 Red de tres puertos con 1 eje de simetría

La rotación no debe confundirse con la reflexión ya que ésta no es físicamente realizable. Esto se debe a que si bien es cierto que los campos se reflejan, al hacerlo ambos E y H, la potencia se propagaría en el mismo sentido. En este sentido es conveniente recordar que al aplicar las condiciones de borde a la interfaz de un dieléctrico con un conductor perfecto, el campo eléctrico tangencial (total) debe ser cero. En consecuencia, el campo eléctrico reflejado tiene dirección opuesta al incidente. Sin embargo, el campo magnético tangencial no es afectado por lo que el vector de Poynting cambia de dirección.

Si la red tiene simetría y por consiguiente planos de referencia de simetría, una operación que puede hacerse es intercambiar los puertos de simetría con su excitación y se obtendrá el mismo resultado que dejando la estructura sin rotación e intercambiando los campos, ya que por definición la estructura no es distinguible.

El operador [G] de simetría puede en principio indicar un intercambio, una suma o una diferencia

de cualquiera de los campos, es decir, puede operar sobre [a], [b], [a]+[b] o [a]-[b]. Por ejemplo:

[G] [a] = [a']

[G] [b] = [b']

donde [G] puede y debe hallarse por inspección, por cuanto la nueva excitación [a'] no es más que una mezcla de los elementos de [a] (por ejemplo intercambiar a_p con a_q o cambiar a_r por $-a_r$). Los coeficientes de la matriz serán 0 o 1 o –1, con no más de un coeficiente diferente de cero por fila y por columna.

Ejemplo: Se dispone de una red de 3 puertos con sus respectivas excitaciones, y se desea intercambiar los puertos 1 y 2 sin alterar el 3. En consecuencia:

$$[G] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[G][a] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = [a']$$

Como [G] tiene un coeficiente no-cero por columna y por fila será ortogonal, esto es:

$$[G]^t [G] = [E] \qquad (4.44)$$

Como [G] es real, también es unitaria

$$[G]^{-1} [G] = [E] \qquad (4.45)$$

En consecuencia

$$[G]^{-1} = [G]^t \qquad (4.46)$$

Como en la red simétrica se pueden intercambiar las excitaciones, se tiene que si

[b] = [S] [a], entonces [b'] =[S] [a']

Al aplicar la matriz de simetría se obtiene:

$$[G] [b] = [S] [G] [a]$$

$$[G] [S] [a] = [S] [G] [a]$$

$$[G] [S] = [S] [G] \qquad (4.47)$$

En consecuencia, [G] y [S] son conmutativas. Se dice que [G] y [S] forman matrices similares.

Esta propiedad es importante por cuanto permite obtener algunos de los parámetros de la red en forma simplificada.

$$[S] = [G]^{-1}\,[S]\,[G]$$

$$[S] = [G]^{t}\,[S]\,[G] \qquad (4.48)$$

Por ejemplo: sea una red de tres puertos con simetría entre los puertos 1 y 2. En este caso:

$$[G] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[S] = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[S] = \begin{bmatrix} S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[S] = \begin{bmatrix} S_{22} & S_{21} & S_{23} \\ S_{12} & S_{11} & S_{13} \\ S_{32} & S_{31} & S_{33} \end{bmatrix}$$

De aquí se puede deducir que:

$$S_{11} = S_{22}$$

$$S_{12} = S_{21}$$

$$S_{13} = S_{23}$$

$$S_{31} = S_{32}$$

Si además la red es recíproca (las redes pasivas constituidas con materiales isotrópicos generalmente lo son) entre los puertos 1 y 3, se tiene que $S_{13} = S_{31}$. En consecuencia:

$S_{11} = S_{22} = \alpha$

$S_{12} = S_{21} = \partial$

$S_{13} = S_{23} = S_{31} = S_{32} = \tau$

$S_{33} = \beta$

$$[S]=\begin{bmatrix} \alpha & \partial & \tau \\ \partial & \alpha & \tau \\ \tau & \tau & \beta \end{bmatrix}$$

Si ahora se aplica la condición unitaria (asumiendo que la red es sin pérdidas) se encuentran las siguientes relaciones:

$$\alpha^2 + \partial^2 + \tau^2 = 1$$
$$2\tau^2 + \beta^2 = 1$$

Un dispositivo práctico que corresponde a estas expresiones es el llamado SEPARADOR DE POTENCIA (en Inglés Power Splitter), el cual se muestra en la figura. La segunda expresión indica que la potencia que entra al puerto 3, $(1-\beta^2)$, se divide por igual entre los otros dos puertos. De igual manera, la potencia que pueda ser transferida dependerá del desacoplamiento de los puertos de salida y del acoplamiento que pueda haber entre ellos. Este dispositivo se utiliza frecuentemente para alimentar varias cargas desde un mismo generador.

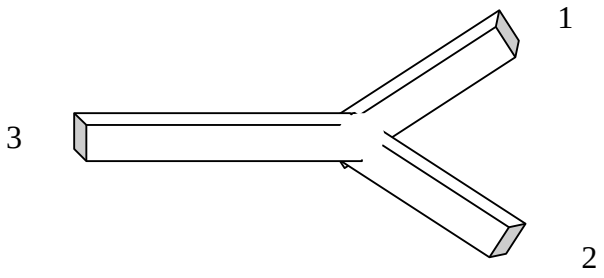


Figura 92

Otra red recíproca de gran interés es el ACOPLADOR DIRECCIONAL (Directional Coupler), aunque la misma no es simétrica.

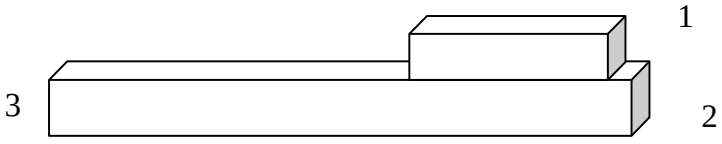


Figura 93

La aplicación de la condición unitaria produce:

$$|S_{11}|^2 + |S_{21}|^2 + |S_{31}|^2 = 1$$
$$|S_{12}|^2 + |S_{22}|^2 + |S_{32}|^2 = 1$$
$$|S_{13}|^2 + |S_{23}|^2 + |S_{33}|^2 = 1$$

La potencia que entra al puerto 3 es $(1-|S_{33}|^2)$ y debe igualar a la suma de las potencias

entregadas a los otros dos puertos. Al trozo de guía que va del puerto 3 al 2 se le denomina línea principal y a la otra línea secundaria. Normalmente, por el puerto 1 se extrae una pequeña fracción de la potencia de entrada del puerto 3 y una cantidad aún menor de la que entra al puerto 2. De esta manera, la señal que sale por el puerto 1 es una pequeña muestra de la potencia que viaja en la línea principal en la dirección $3 \rightarrow 2$, pero no en la dirección $2 \rightarrow 3$, de allí el nombre de acoplador direccional. El término $1/S_{31}$ expresado en dB se conoce con el nombre de Factor de Acoplamiento del acoplador (por lo que luce como una atenuación). De igual manera a $1/S_{21}$ expresado en dB se le conoce con el nombre de Directividad.

4.3.4 Componentes no recíprocos

Además de los componentes descritos anteriormente, en circuitos de microondas se emplean otros como los AISLADORES y CIRCULADORES cuyos puertos no son intercambiables.
Un AISLADOR es una red no recíproca de dos puertos. Su principal utilidad radica en reducir notablemente la onda reflejada desde una carga. Es importante destacar que este componente no produce un acoplamiento, sino que simplemente evita que la onda reflejada llegue hasta el generador. Existen muchos modelos, pero la mayoría de ellos emplea materiales anisotrópicos como las ferritas.

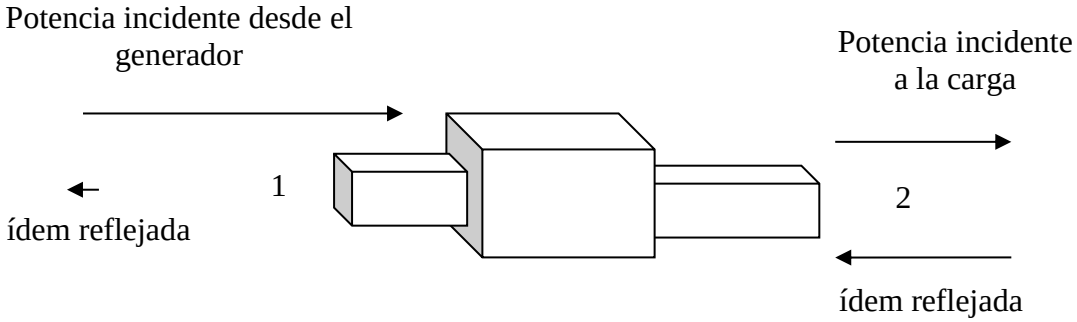


Figura 94

Otro componente no recíproco es el CIRCULADOR. En la gráfica se muestra un Circulador de tres puertos (aunque los puede haber de mayor número de puertos).

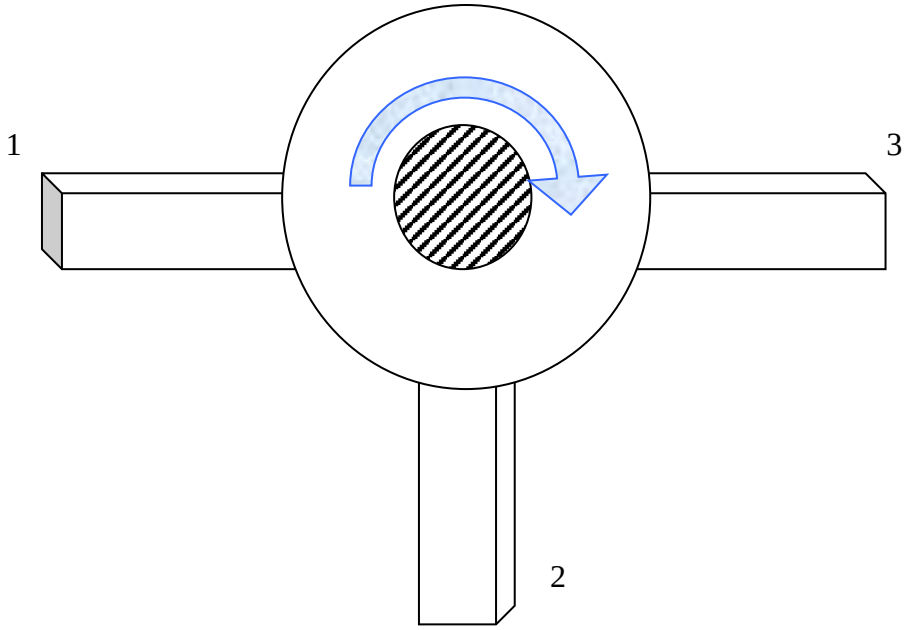


Figura 95 Circulador de 3 puertos

En este caso la potencia se transfiere de un puerto al otro en el sentido indicado por la flecha. Por ejemplo, $|S_{21}|$ debe ser grande (cercano a 1) en tanto que $|S_{12}|$ debe ser lo más pequeño posible. Lo mismo se aplica al resto de los puertos. Este dispositivo se puede usar para conectar un transmisor y un receptor a una antena común. Toda la potencia del generador es enviada a la antena y una cantidad muy pequeña es acoplada al receptor. Sin embargo, la potencia recibida por la antena es enviada al receptor con muy poca atenuación. Sin embargo, debe tenerse cuidado pues, si la antena estuviese desacoplada, entonces existiría una onda reflejada fuerte que sería aplicada al receptor saturándolo. En algunas situaciones particulares como el caso de los sistemas de radar, la magnitud de esta onda reflejada pudiera dañar al receptor, o al menos disminuir notoriamente su sensibilidad; en estos casos se acostumbrar colocar a la entrada del receptor un componente de protección basado en tubos de gas o en componentes semiconductores como los varistores.

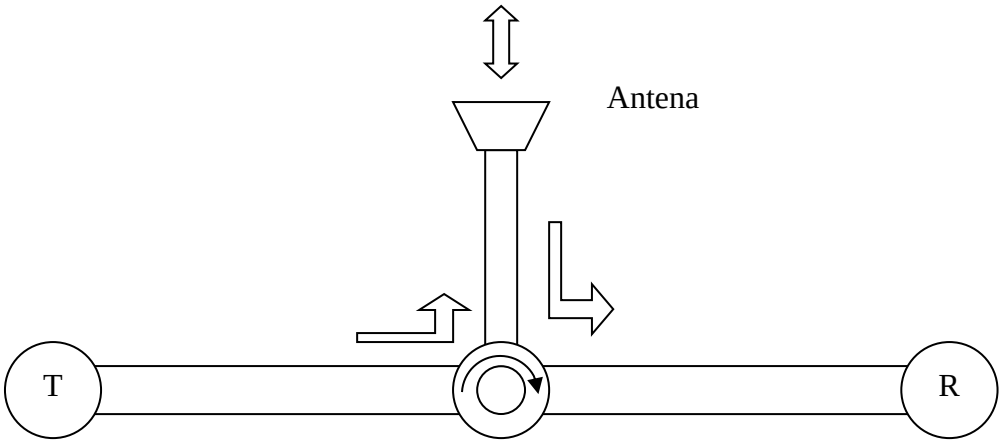


Figura 96

El estudio detallado de estos componentes se llevará a cabo en otra asignatura.

4.4 Otras Matrices utilizadas en Redes

Hasta el momento se ha considerado sólo la relación que existe entre los parámetros de salida de una red de N-puertos (es decir el vector columna [b]) con las a_i, a través de la matriz [S]. Sin embargo, existen otras representaciones matriciales que establecen relaciones diferentes entre los parámetros, las cuales pueden ser más apropiadas en algunos casos particulares. En el caso de redes de dos puertos es conveniente la utilización de la matriz de transmisión [T], particularmente en aquellos casos cuando las redes se conectan en cascada. La matriz de transmisión se define a partir de la siguiente relación:

$$\begin{bmatrix} b_2 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} \qquad (4.49)$$

Esta representación particular se basa en que cuando las redes se disponen en cascada, la salida de una de ellas se convierte en la entrada de la siguiente. Considérese la siguiente red constituida por la cascada de dos redes:

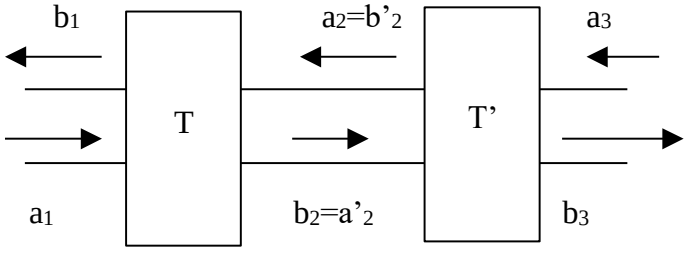


Figura 97

Al aplicar a la segunda red la matriz $[T_2]$ se tiene:

$$\begin{bmatrix} b_3 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T'_{11} & T'_{12} \\ T'_{21} & T'_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a'_2 \\ b'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T'_{11} & T'_{12} \\ T'_{21} & T'_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_2 \\ a_2 \end{bmatrix} \qquad (4.50)$$

y al sustituir por los parámetros de entrada a la primera red se obtiene finalmente

$$\begin{bmatrix} b_3 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T'_{11} & T'_{12} \\ T'_{21} & T'_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} \qquad (4.51)$$

Esto permite definir una matriz de transmisión equivalente entre los puertos 1 y 3. Es fácil ver que tal matriz es obtenida de la multiplicación de las matrices de transmisión individuales. En general se podrá escribir:

$$[T] = [T_N]\,[T_{N-1}] \ldots .[T_2]\,[T_1] \qquad (4.52)$$

para la matriz equivalente de varias redes en cascada.

Para hallar la matriz de transmisión en términos de la matriz de dispersión es necesario resolver el sistema de ecuaciones para hallar a_2 y b_2:

$$b_1 = S_{11}a_1 + S_{12}a_2$$
$$b_2 = S_{21}a_1 + S_{22}a_2$$

De la primera ecuación se halla:

$$a_2 = \frac{1}{S_{12}}(-S_{11}a_1 + b_1) \qquad (4.53)$$

de donde se hallan directamente T_{21} y T_{22}. Al sustituir este resultado en la segunda ecuación se tiene:

$$b_2 = \left(S_{21} - \frac{S_{22}S_{11}}{S_{12}}\right)a_1 + \frac{S_{22}}{S_{12}}b_1 \qquad (4.54)$$

De esta forma se obtiene:

$$[T] = \begin{bmatrix} S_{21} - \frac{S_{22}S_{11}}{S_{12}} & \frac{S_{22}}{S_{12}} \\ -\frac{S_{11}}{S_{12}} & \frac{1}{S_{12}} \end{bmatrix} \qquad (4.55)$$

Una de las mayores aplicaciones de la matriz de transmisión se halla en el diseño de circuitos activos. Es fácil ver en esta expresión que la ganancia del dispositivo depende no sólo de S_{21} sino que además existe un término de realimentación representado por S_{12}. Dependiendo del valor de S_{12} y de la impedancia de carga es posible que la red sea inestable y se produzcan

oscilaciones indeseables. Debido a que la resolución de estos circuitos activos se hace muchas veces en forma gráfica y a que los parámetros de los componentes varían con la frecuencia, los fabricantes generalmente entregan los parámetros de dispersión de dichos componentes en forma gráfica en sus hojas técnicas.

4.5 Ejemplos de cálculo.

En el siguiente ejercicio se muestra la utilización de la Carta de Smith en el proceso de obtención de la matriz de dispersión de una red.

Se dispone de una carga cuyo coeficiente de reflexión es de $0.45\angle 300°$. Dicha carga se va a acoplar por medio de un sistema de stub doble separados entre sí 0.12λ. Una vez resuelta la red se va a hallar la matriz de dispersión del acoplador.

Se utiliza el método descrito en 3.12.7 y se hallan dos soluciones. Se va utilizar una Carta de Smith que muestra simultáneamente los lugares geométricos de la impedancia (color rojo) y admitancia (color azul).

Se coloca la carga en la carta de Smith en el punto DP1. La admitancia vale 0,483+j 0,472. Se rota el circulo de parte real 0,483 hacia el generador en $0,12\lambda$ y se intercepta con el circulo de parte real igual a 1. Se obtienen dos cortes con el circulo de parte real 1: 1-j 2,91 y 1+j 0,78. En el dibujo de la izquierda se muestra la primera solución como el punto TP3. Al devolverse $0,12\lambda$ hacia la carga se tiene el punto TP2: 0,483+j 1,96. Al hacer la diferencia se obtiene que la impedancia del stub cercano a la carga vale 1,486 lo cual equivale a una longitud de $0,4057\lambda$. Para lograr el acoplamiento es necesario compensar la admitancia del punto TP3 con un stub de subceptancia 2,91 lo cual equivale a $0,445\lambda$ con lo que finalmente se obtiene el punto TP4. El procedimiento es similar para la otra solución.

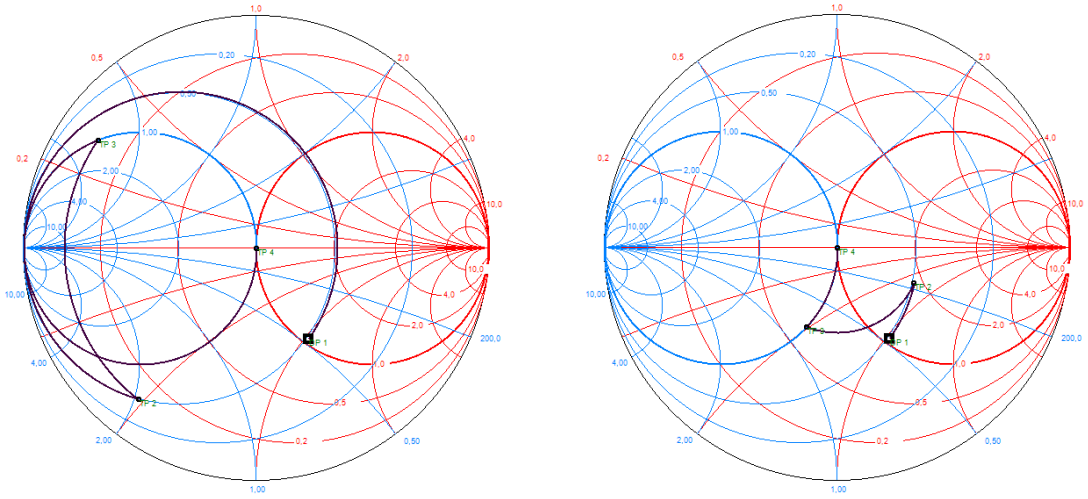


Figura 98

El circuito del acoplador queda, utilizando la primera solución, como sigue:

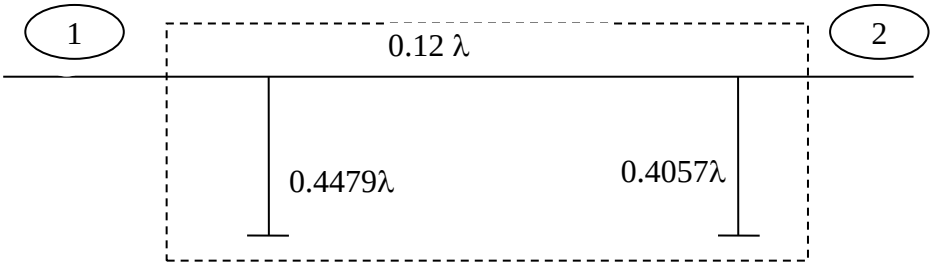


Figura 99

Para hallar el parámetro de dispersión S11 se acopla el puerto de la carga y se observa la impedancia de entrada al puerto 1. Nótese que ahora el punto de partida DP1 es el centro de la Carta de Smith. La admitancia de entrada es el punto TP4: 1,81+ j 1,08. El coeficiente de reflexión de tensión es el valor de S11 y vale 0,45∢-147°

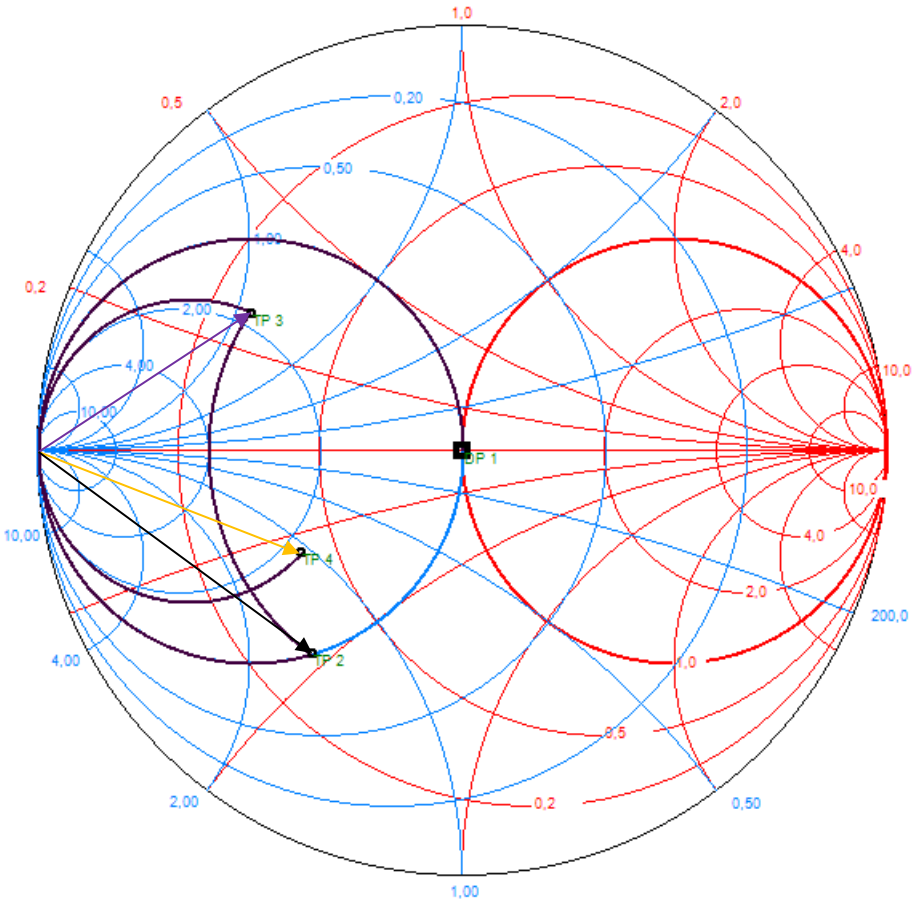


Figura 100

La tensión total en el puerto 1 es el vector amarillo (desde el origen de voltajes al punto TP4) y vale a1*(1+S11). Si hacemos a1=1, este valor también es igual a $V^1(1+\Gamma_1)$ donde V^1 es la tensión incidente en esa línea y Γ_1 es la reflexión observada en la línea intermedia. Su valor está indicado por la línea púrpura desde el origen al punto TP3. De aquí se puede despejar el valor de V^1 =1,12∡-54°. Este valor se atrasa en 43,2° debido a la línea de 0,12λ por lo que en el otro extremo vale 1,12∡-97,2, el cual se aplica a la combinación de la carga acoplada con el segundo stub. Esta tensión incidente se multiplica por $1+\Gamma_2$ que es el vector en negro que va desde el origen a TP2 y vale 0.80∡-36°. Finalmente, el valor de S21 es 0,89∡-133°. Debido a que la red es simétrica, éste será también el valor de S12.

Para hallar S22 se repite la operación pero en esta caso se acopla el puerto 1 y se observa la reflexión en el puerto 2.El resultado es S22= 0,45 ∡60°

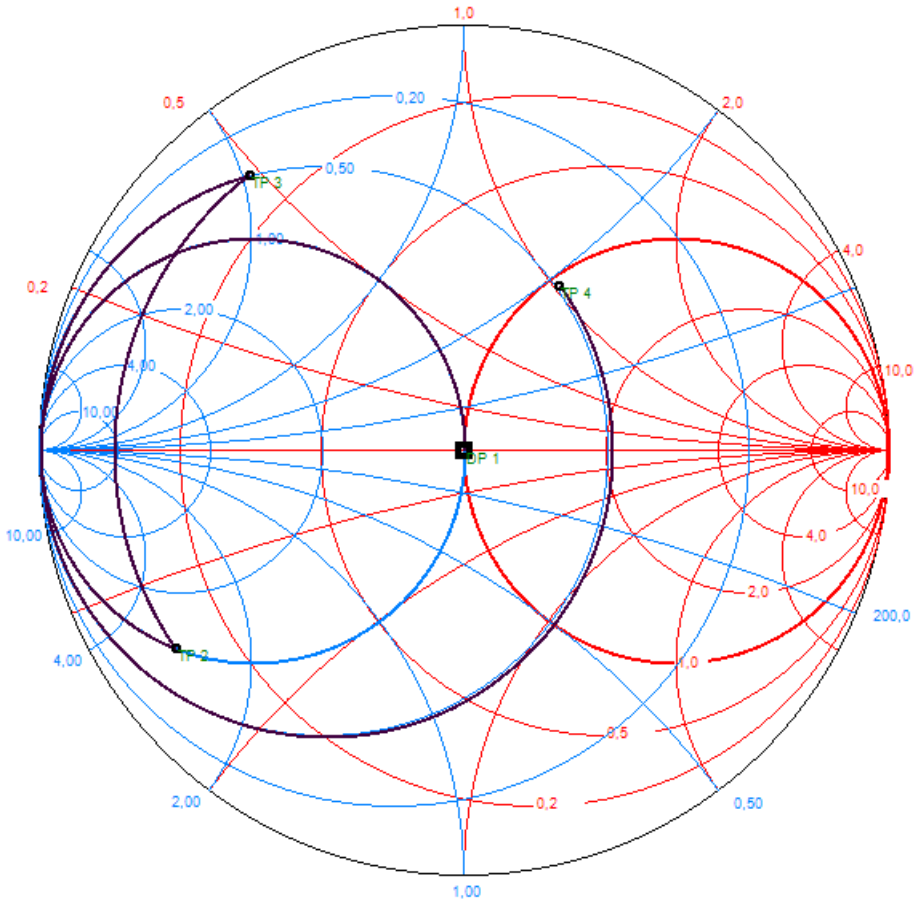


Figura 101

Resumiendo, la matriz de dispersión vale:

$$S = \begin{bmatrix} 0{,}45\angle -147° & 0{,}89\angle -133° \\ 0{,}89\angle -133° & 0{,}45\angle 60° \end{bmatrix}$$

Finalmente, para verificar la condición unitaria se calcula $=0{,}45^2 + 0{,}89^2 = 0{,}995$, lo cual es muy aproximadamente igual a 1 tomando en cuenta los errores de redondeo al leer en la Carta de Smith. Este es el resultado esperado por que se trata de una red sin pérdidas.

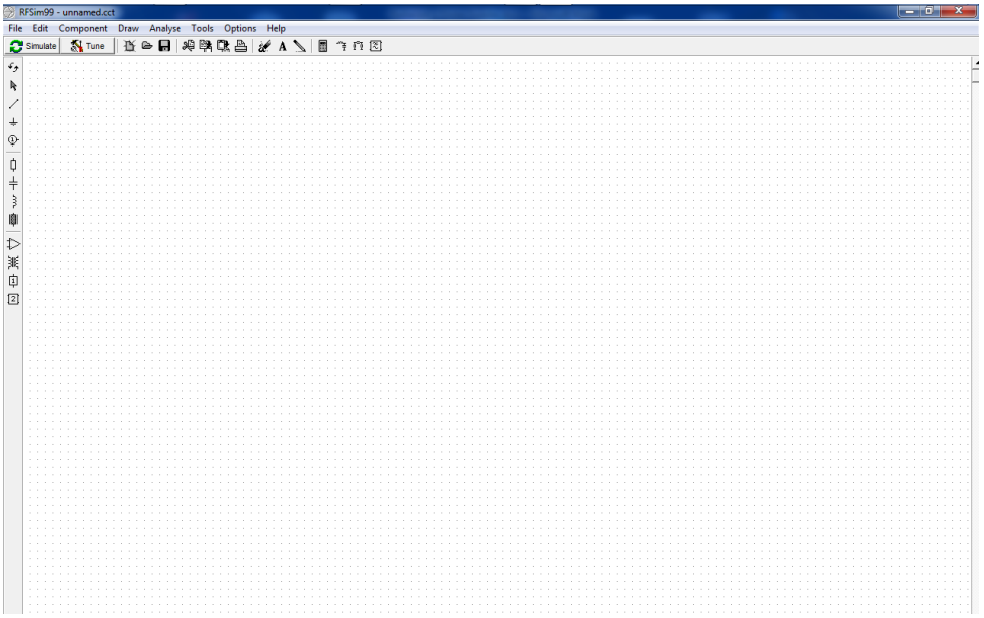
Aplicando la fórmula 4.55 se obtiene la siguiente matriz de transmisión:

$$T = \begin{bmatrix} 0.9351\angle -147.9° & 0{,}5039\angle 107.5° \\ 0{,}5039\angle 79.6° & 1.198\angle 47.5° \end{bmatrix}$$

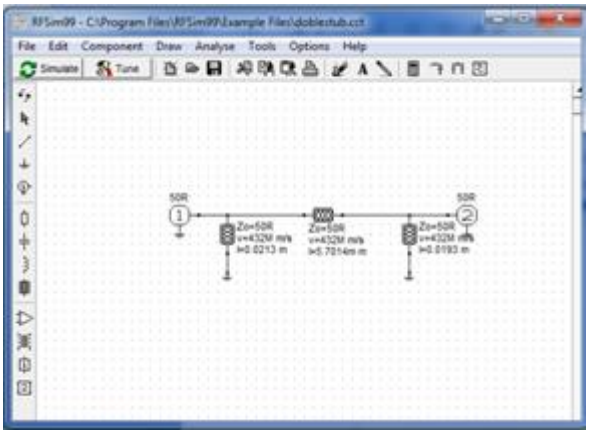
4.6 Software para el cálculo de Redes.

Además de los programas mencionados anteriormente como el MathLab existen algunos que son específicos para el cálculo de Redes. Uno de ellos es RFSym99 el cual tiene una interfaz de

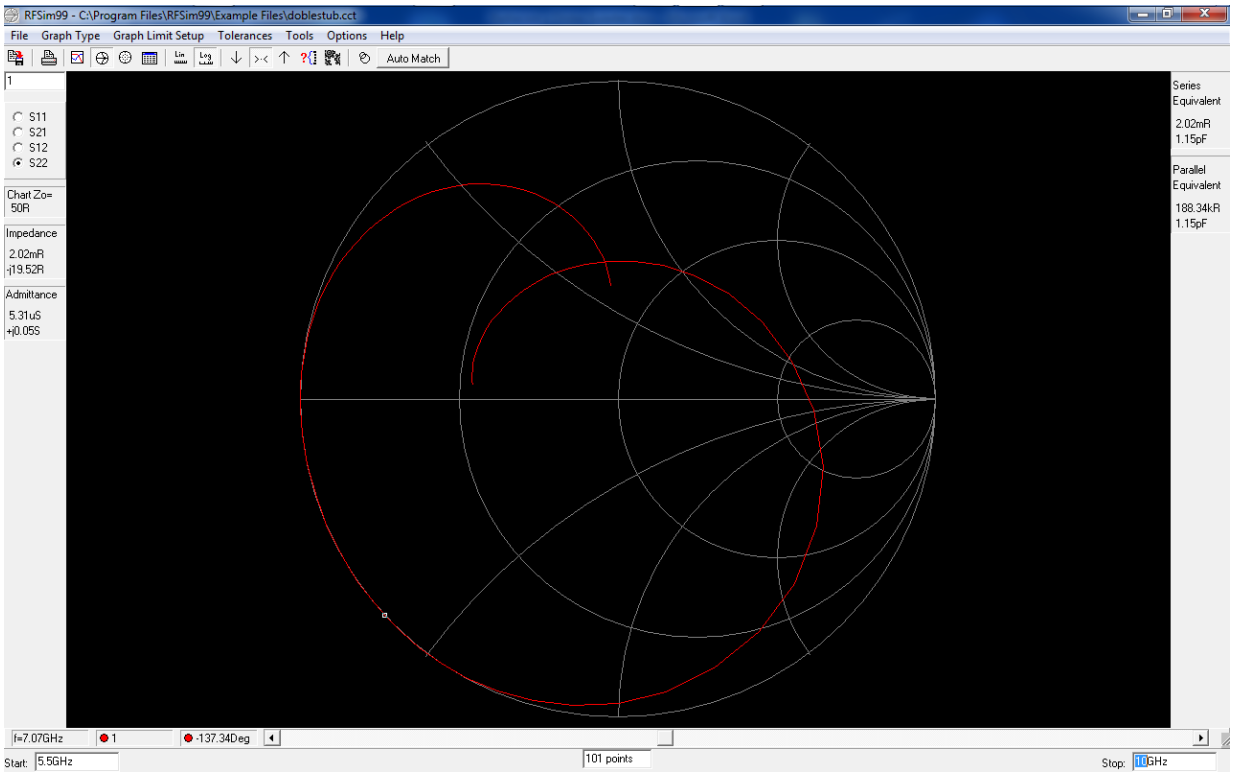
usuario similar al MultiSim por lo que es muy fácil de aprender por los estudiantes.



Los componentes se seleccionan de la lista de la izquierda y se dibujan sobre la rejilla como en el siguiente ejemplo



Los resultados se pueden presentar sobre la carta de Smith como en el siguiente ejemplo:


RFSim99 - C:\Program Files\RFSim99\Example Files\doblestub.cct
File Graph Type Graph Limit Setup Tolerances Tools Options Help
Auto Match
1
S11
S21
S12
S22
Chart Zo=
50R
Impedance
2.02mR
-j19.52R
Admittance
5.31uS
+j0.05S
Series
Equivalent
2.02mR
1.15pF
Parallel
Equivalent
188.34kR
1.15pF
f=7.07GHz
1
-137.34Deg
Start: 5.5GHz
101 points
Stop: 10GHz

Capítulo 5. Radiación

5. Radiación.

Hasta el momento se ha estudiado el comportamiento de las ondas electromagnéticas que viajan en el espacio libre o en estructuras cerradas, como en el caso de las líneas de transmisión, pero sin prestar demasiada atención a las fuentes que producen tales ondas. En esta sección se estudiarán los mecanismos que producen dicha emisión de ondas electromagnéticas a partir de las fuentes; tales fuentes estarán constituidas por distribuciones de cargas o corrientes que varían en el tiempo, ya sea en forma transitoria o permanente. En la sección 1-7 se definieron dos magnitudes auxiliares denominadas respectivamente el potencial magnético vectorial y el potencial eléctrico escalar. Dichas magnitudes fueron elegidas para simplificar el cálculo de los campos viajeros producidos por la presencia de fuentes de corriente o cargas variables en el tiempo. Las ecuaciones diferenciales correspondientes son:

$$\nabla^2\vec{A} - \mu\epsilon\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{A} = -\mu\vec{J}$$

$$\nabla^2\phi - \mu\epsilon\frac{\partial^2}{\partial t^2}\phi = -\frac{1}{\epsilon}q_v$$

cuyas soluciones, en coordenadas esféricas son:

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu}{4\pi}\iiint\frac{\vec{J}\left(t-\sqrt{\mu\epsilon}\left|\vec{r}-\overrightarrow{r'}\right|\right)}{\left|\vec{r}-\overrightarrow{r'}\right|}d\overrightarrow{v'} \tag{1.60}$$

y

$$\phi(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon}\iiint\frac{q_v\left(t-\sqrt{\mu\epsilon}\left|\vec{r}-\overrightarrow{r'}\right|\right)}{\left|\vec{r}-\overrightarrow{r'}\right|}d\overrightarrow{v'} \tag{1.61}$$

Finalmente, los campos se hallan a partir de:

$$\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{A} - \nabla\phi = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{A} + \frac{1}{\mu\epsilon}\int\nabla\left(\nabla\cdot\vec{A}\right)dt$$

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu}\nabla\times\vec{A}$$

Las expresiones (1.60) y (1.61) muestran que el campo electromagnético producido en un punto del espacio **r**, presenta la misma variación temporal que las fuentes ubicadas en **r´**, pero sufren un retardo de tiempo que depende de la separación |**r**-**r´**|. Como se demostró también en la misma sección estas perturbaciones constituyen ondas que se alejan de las fuentes a una velocidad $(\mu\varepsilon)^{-1/2}$ y constituyen lo que se denomina el campo de radiación. Estas ondas transportan energía que es suplida por las fuentes. En esta sección se profundizará sobre estos mecanismos de radiación y, al igual que en el Capítulo2, se usarán excitaciones sinusoidales con la finalidad de simplificar los cálculos y obtener soluciones cerradas que sean fácilmente interpretables.

En primer lugar se asumirán variaciones sinusoidales y se convertirán dichas magnitudes instantáneas a sus equivalentes fasoriales:

$$\vec{E}(x,y,z,t) = \Re\left[\sqrt{2}\,\vec{\mathrm{E}}(x,y,z)\,e^{j\omega t}\right] \tag{5.1}$$

$$\vec{H}(x,y,z,t) = \Re\left[\sqrt{2}\,\vec{\mathrm{H}}(x,y,z)\,e^{j\omega t}\right]$$

$$\vec{D}(x,y,z,t) = \Re\left[\sqrt{2}\,\vec{\mathrm{D}}(x,y,z)\,e^{j\omega t}\right]$$

$$\vec{B}(x,y,z,t) = \Re\left[\sqrt{2}\,B(x,y,z)\,e^{j\omega t}\right]$$

$$\vec{J}(x,y,z,t) = \Re\left[\sqrt{2}\,\vec{\mathrm{J}}(x,y,z)\,e^{j\omega t}\right]$$

$$\vec{A}(x,y,z,t) = \Re\left[\sqrt{2}\,\vec{\mathrm{A}}(x,y,z)\,e^{j\omega t}\right]$$

$$q_v(x,y,z,t) = \Re\left[\sqrt{2}\,\mathrm{q}_v(x,y,z)\,e^{j\omega t}\right]$$

$$\phi(x,y,z,t) = \Re\left[\sqrt{2}\,\phi(x,y,z)\,e^{j\omega t}\right]$$

Las magnitudes retardadas serán por tanto:

$$\vec{J}\left(\vec{r}-\overrightarrow{r'},t\right) = \Re\left[\sqrt{2}\vec{J}\left(\overrightarrow{r'}\right)e^{j\omega\left(t-\sqrt{\mu\epsilon}\left|\vec{r}-\overrightarrow{r'}\right|\right)}\right] = \vec{J}\left(\vec{r}-\overrightarrow{r'},t\right) = \Re\left[\sqrt{2}\vec{J}\left(\overrightarrow{r'}\right)e^{j\omega t}\,e^{-j\omega\sqrt{\mu\epsilon}\left|\vec{r}-\overrightarrow{r'}\right|}\right]$$

$$\vec{J}\left(\vec{r}-\overrightarrow{r'},t\right) = \Re\left[\sqrt{2}\vec{J}\left(\overrightarrow{r'}\right)e^{j\omega t}\,e^{-j\beta\left|\vec{r}-\overrightarrow{r'}\right|}\right] \tag{5.2}$$

$$q_v\left(\vec{r}-\overrightarrow{r'},t\right) = \Re\left[\sqrt{2}\,q_v\left(\overrightarrow{r'}\right)e^{j\omega t}\,e^{-j\beta\left|\vec{r}-\overrightarrow{r'}\right|}\right] \tag{5.3}$$

La sustitución de estas cantidades en (1.59) y en (1.60) produce finalmente las siguientes expresiones fasoriales:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi}\iiint \frac{\vec{J}\left(\overrightarrow{r'}\right)e^{-j\beta\left|\vec{r}-\overrightarrow{r'}\right|}}{\left|\vec{r}-\overrightarrow{r'}\right|}\,dv' \tag{5.4}$$

y

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon}\iiint \frac{q_v(\overrightarrow{r'})\, e^{-j\beta\left|\vec{r}-\overrightarrow{r'}\right|}}{\left|\vec{r}-\overrightarrow{r'}\right|}\, dv' \tag{5.5}$$

Resta ahora resolver estas expresiones para algunas distribuciones conocidas de fuentes J(**r**´) y q_v(**r**´) con la finalidad de obtener expresiones cerradas para luego proceder a la interpretación de los resultados. Dos de las fuentes más sencillas son el dipolo eléctrico y el dipolo magnético, los cuales se analizarán en las próximas secciones.

5-1 Campo radiado por un dipolo corto.

De manera similar a la sección 1-7, considérese una fuente de radiación constituida por un pequeño conductor de longitud "Δl" por el que circula una corriente "I". La longitud de dicho conductor es mucho menor que la longitud de la onda en cualquiera de los medios como para asumir que la corriente "I" es constante a lo largo del mismo. Asimismo se asumirá que la longitud del dipolo es mucho menor que la distancia entre él y cualquier punto del espacio bajo estudio. Esto último limita la validez de este modelo a aquellos puntos tales que **|r|**=r sean mucho mayores que Δl pero es suficiente para la mayoría de las situaciones prácticas. Esta estructura recibe el nombre de dipolo elemental y el producto "I Δl" es una característica del mismo y recibe el nombre de "**momento del dipolo**".

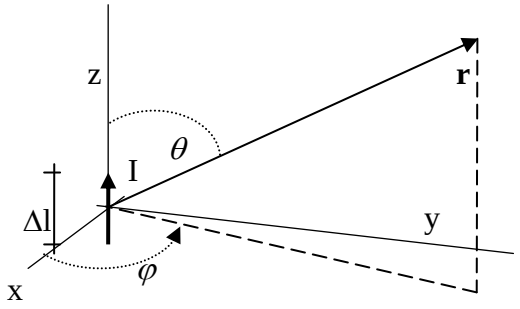


Figura 102

El dipolo será ubicado en el origen de un sistema de coordenadas esféricas de manera que la longitud del mismo quede sobre el eje polar "z".

Para aquellos puntos del espacio que satisfagan la condición anterior, **|r|**=r >> Δl, la ecuación (3.3) se reduce a:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi}\iiint \frac{\vec{J}\left(\overrightarrow{r'}\right) e^{-j\beta|\vec{r}-\overrightarrow{r'}|}}{\left|\vec{r}-\overrightarrow{r'}\right|}\, dv' = \frac{\mu}{4\pi}\frac{e^{-j\beta r}}{r}\iiint \vec{J}\left(\overrightarrow{r'}\right) dv'$$

Como $\vec{J}\left(\overrightarrow{r'}\right)$ está sobre el eje polar, entonces, $\vec{J}\left(\overrightarrow{r'}\right) = J\left(\overrightarrow{r'}\right)\hat{k}$, y la integral de volumen se reduce a,

$$\iiint \vec{J}\left(\overrightarrow{r'}\right) dv' = \iiint J\left(\overrightarrow{r'}\right) dv'\,\hat{k} = \iiint J\left(\overrightarrow{r'}\right) ds\,\Delta l\,\hat{k} = I\,\Delta l\,\hat{k}$$

Finalmente se obtiene,

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi}\frac{e^{-j\beta r}}{r} I\,\Delta l\,\hat{k} \tag{5.6}$$

Por tanto, en cualquier punto del espacio el potencial vectorial magnético tiene la dirección del eje polar y sólo su magnitud y fase es afectada por la distancia a la fuente.

Los campos se hallan de:

$$\vec{E} = -j\omega\vec{A} + \frac{1}{\mu\epsilon}\frac{1}{j\omega}\nabla\left(\nabla\cdot\vec{A}\right)$$

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu}\nabla\times\vec{A}$$

El campo magnético vale entonces,

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu}\nabla\times\vec{A} = \frac{1}{\mu}\nabla\times\left(\frac{\mu}{4\pi}\frac{e^{-j\beta r}}{r} I\,\Delta l\,\hat{k}\right) = \frac{1}{4\pi} I\,\Delta l\,\nabla\times\left(\frac{e^{-j\beta r}}{r}\,\hat{k}\right) = \frac{1}{4\pi} I\,\Delta l\,\nabla\left(\frac{e^{-j\beta r}}{r}\right)\times\,\hat{k}$$

Es necesario expresar el vector unitario **k** en términos de los vectores unitarios del sistema de coordenadas esféricas: $\hat{\mathbf{k}} = \cos\theta\,\hat{\mathbf{r}} - \sin\theta\,\hat{\Theta}$

Entonces,

$$\vec{H} = \frac{1}{4\pi} I\,\Delta l\,\nabla\left(\frac{e^{-j\beta r}}{r}\right)\times\,\left(\hat{r}\cos\theta - \hat{\theta}\sin\theta\right)$$

$$= \frac{1}{4\pi} I\,\Delta l\,\left(\frac{r\left(-j\beta\, e^{-j\beta r}\right) - e^{-j\beta r}}{r^2}\right)\hat{r}\times\left(\hat{r}\cos\theta - \hat{\theta}\sin\theta\right)$$

$$= \frac{1}{4\pi} I\,\Delta l\,\left(\frac{r\left(-j\beta\, e^{-j\beta r}\right) - e^{-j\beta r}}{r^2}\right)(-\sin\theta)\hat{\varphi}$$

$$\vec{H} = \frac{1}{4\pi} I\ \Delta l\ \left(\frac{\left(j\beta\ e^{-j\beta r} \right)}{r} + \frac{e^{-j\beta r}}{r^2} \right) (\sin\theta)\hat{\varphi} \tag{5.7}$$

El campo eléctrico vale:

$$\vec{E} = -j\omega \frac{\mu}{4\pi} \frac{e^{-j\beta r}}{r} I\ \Delta l\ \hat{k} + \frac{1}{\mu\epsilon} \frac{1}{j\omega} \nabla \left(\nabla \cdot \frac{\mu}{4\mu} \frac{e^{-j\beta r}}{r} I\ \Delta l\ \hat{k} \right)$$

$$= -j\omega \frac{\mu}{4\pi} \frac{e^{-j\beta r}}{r} I\ \Delta l \left(\hat{r}\cos\theta - \hat{\theta}\sin\theta \right) + \frac{1}{\mu\epsilon} \frac{1}{j\omega} \frac{\mu}{4\mu} I\ \Delta l\ \nabla \left(\nabla \frac{e^{-j\beta r}}{r} \cdot \left(\hat{r}\cos\theta - \hat{\theta}\sin\theta \right) \right) =$$

$$= -j\omega \frac{\mu}{4\pi} \frac{e^{-j\beta r}}{r} I\ \Delta l \left(\hat{r}\cos\theta - \hat{\theta}\sin\theta \right)$$

$$+ \frac{I\ \Delta l}{j\omega 4\pi\epsilon} \nabla \left(\left(\frac{r\left(-j\beta\ e^{-j\beta r} \right) - e^{-j\beta r}}{r^2} \right) \hat{r} \cdot \left(\hat{r}\cos\theta - \hat{\theta}\sin\theta \right) \right)$$

$$\vec{E} = -j\omega \frac{\mu}{4\pi} \frac{e^{-j\beta r}}{r} I\ \Delta l \left(\hat{r}\cos\theta - \hat{\theta}\sin\theta \right) + \frac{I\ \Delta l}{j\omega 4\pi\epsilon} \nabla \left(\left(\frac{r\left(-j\beta\ e^{-j\beta r} \right) - e^{-j\beta r}}{r^2} \right) \cos\theta \right)$$

$$\vec{E} = -j\omega \frac{\mu}{4\pi} \frac{e^{-j\beta r}}{r} I\ \Delta l \left(\hat{r}\cos\theta - \hat{\theta}\sin\theta \right)$$

$$+ \frac{I\ \Delta l}{j\omega 4\pi\epsilon} \left(\left(-\beta^2 + \frac{2j\beta}{r} + \frac{2}{r^2} \right) \frac{-e^{-j\beta r}}{r} \cos\theta\ \hat{r} + \left(\frac{j\beta}{r} + \frac{1}{r^2} \right) \frac{e^{-j\beta r}}{r} \sin\theta\ \hat{\theta} \right)$$

Las componentes individuales son:

$$E_R = \frac{I\,\Delta l}{4\pi\ j\omega\varepsilon} \left(\beta^2 - \beta^2 + \frac{2\,j\beta}{r} + \frac{2}{r^2} \right) \frac{e^{-j\beta r}}{r} \cos\theta$$

$$E_\theta = j\omega \frac{\mu}{4\pi} \frac{e^{-j\beta r}}{r} I\Delta l(sin\,\theta) + \frac{I\Delta l}{4\pi j\omega\varepsilon} \left(\left(\frac{j\beta}{r} + \frac{1}{r^2} \right) \frac{e^{-j\beta r}}{r} sin\,\theta \right)$$

Finalmente,

$$E_R = \frac{I\,\Delta l}{2\pi} \left(\frac{\eta}{r} - \frac{j}{\omega\varepsilon\, r^2} \right) \frac{e^{-j\beta r}}{r} \cos\theta \tag{5.8}$$

$$E_\theta = \frac{I\,\Delta l}{4\pi} \left(\left(j\omega\mu + \frac{\eta}{r} - \frac{j}{\omega\varepsilon\, r^2} \right) \frac{e^{-j\beta r}}{r} \sin\theta \right) \tag{5.9}$$

5-1.1 Interpretación de las soluciones. Campo lejano y campo cercano. Patrón de radiación.

Las ecuaciones (5.6), (5.7) y (5.8) definen el campo electromagnético irradiado por el dipolo elemental. Puede observarse que tanto el campo magnético como el eléctrico varían con la distancia siguiendo diversas leyes de dependencia.

Para interpretar los resultados obtenidos se considerarán dos situaciones: cuando la distancia es muy pequeña y cuando es muy grande.

En el primer caso se considerará la región muy cercana al radiador, tal que $\beta r = \frac{2\pi}{\lambda} r << 1$.

Entonces, $e^{-j\beta r} \cong 1 - j\beta r - \frac{(j\beta r)^2}{2} + \cdots \cong 1$

En las expresiones de E y H los términos dominantes serán aquellos que poseen la mayor potencia de "r", es decir,

$$\vec{H} = \frac{1}{4\pi} I\,\Delta l \left(\frac{1}{r^2}\right)(\sin\theta)\hat{\varphi}$$

$$E_R = \frac{I\,\Delta l}{4\pi}\left(\frac{-2j}{\omega\varepsilon\, r^3}\right)\cos\theta \qquad (5.10)$$

$$E_\theta = \frac{I\,\Delta l}{4\pi}\left(\frac{-j}{\omega\varepsilon\, r^3}\right)\sin\theta$$

El campo magnético es similar al producido por un elemento de corriente de acuerdo a la Ley de Biot-Savat, en tanto que el campo eléctrico equivale al producido por un dipolo constituido por un par de cargas eléctricas. Se dice entonces que el campo producido es "cuasi-estático"

A distancias mayores comienza a adquirir importancia un modo inhomogéneo, el modo TM,

$$\vec{H} = \frac{1}{4\pi} I\,\Delta l \left(\frac{e^{-j\beta r}}{r^2}\right)(\sin\theta)\hat{\varphi}$$

$$E'_R = \frac{I\,\Delta l}{2\pi}\frac{\eta}{r}\left(\frac{e^{-j\beta r}}{r}\right)\cos\theta \qquad (5.11)$$

$$E'_\theta = \frac{I\,\Delta l}{4\pi}\frac{\eta}{r}\left(\frac{e^{-j\beta r}}{r}\right)\sin\theta$$

El campo eléctrico posee componentes tanto transversales como longitudinales. La región definida por estas condiciones recibe el nombre de campo cercano o región de Fresnell.

A grandes distancias los términos de mayor potencia de "r" decaen rápidamente y los campos son:

$$\vec{H} = j\beta \frac{1}{4\pi} I\,\Delta l\,\frac{\left(e^{-j\beta r}\right)}{r}(\sin\theta)\hat{\varphi}$$

$$E_R'' \cong 0 \qquad (5.12)$$

$$E_\theta'' = \frac{I\,\Delta l}{4\pi}\,j\omega\mu\left(\frac{e^{-j\beta r}}{r}\right)\sin\theta$$

Como se aprecia, éste es un modo TEM: una onda esférica que se aleja en dirección radial. El campo magnético es azimutal en tanto que el campo eléctrico contiene sólo una componente en la dirección de elevación. Esta región del espacio recibe el nombre de campo lejano o región de Fraunhofer. Es éste el campo que interesa principalmente en los sistemas de comunicaciones pues es el responsable de la transmisión de la energía a grandes distancias que sirve de portadora a la información. Más adelante se deducirá una expresión para establecer una distancia límite entre ambas regiones.

Un análisis un poco más detallado de las expresiones (5.11) indica que los campos radiados presentan dependencia no sólo de la distancia, "r", sino también del ángulo de elevación, "θ". La variación radial corresponde a una función de onda esférica:

$$\frac{e^{-j\beta r}}{r} \qquad (5.13)$$

La dependencia angular indica que la energía no es irradiada por igual en todas direcciones. Se dice entonces que la fuente de radiación es directiva. La función de ángulo F(θ,φ) (en el caso general depende tanto de θ como de φ) se conoce con el nombre de patrón de radiación de campo. En la mayoría de las aplicaciones interesa más el patrón de radiación de potencia que es el cuadrado de la función anterior.

En términos de estas definiciones se puede escribir que el campo eléctrico en el campo lejano vale:

$$E_\theta'' = \underbrace{-j\omega\frac{\mu}{4\mu} I\ \Delta l}_{Excitación} \quad \underbrace{\frac{e^{-j\beta r}}{r}}_{Onda\ esférica} \quad \underbrace{F(\theta,\varphi)}_{Patrón\ de\ campo\ normalizado}$$

(5.14)

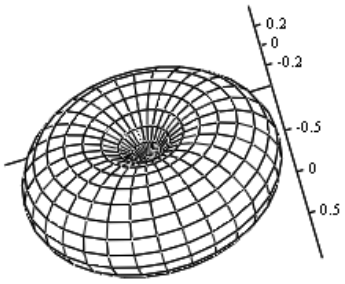
La densidad de potencia en campo lejano vale:

$$\overrightarrow{E''} \times \overrightarrow{H''}^* = \frac{I\Delta l}{4\pi} j\omega\mu\ \frac{e^{-j\beta r}}{r}\sin\theta\ \hat{\theta} \times \frac{I^*\Delta l}{4\pi}(-j\beta)\frac{e^{j\beta r}}{r}\sin\theta\ \hat{\varphi}$$

$$\vec{S} = \overrightarrow{E''} \times \overrightarrow{H''^*} = \left(\frac{I\Delta l}{4\pi}\right)^2 \beta^2\eta\ \sin^2\theta\ \hat{r} = \left(\frac{I\Delta l}{4\lambda r}\right)^2 \eta\ \sin^2\theta\ \hat{r}$$

(5.15)

Por tanto, la potencia por unidad de área que se observa en el campo lejano decrece con el inverso del cuadrado de la distancia y presenta además una dependencia angular en ($\sin^2\theta$) que define al patrón de radiación.



Patrón de Radiación del dipolo corto

Figura 103

La potencia promedio total irradiada por el dipolo elemental (o dipolo de Hertz) se obtiene por integración. Tomando como superficie de integración una esfera de radio "r" se tiene:

$$P = \iint \vec{S}\cdot d\vec{a} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \left(\frac{I\Delta l}{4\lambda r}\right)^2 \eta\ \sin^2\theta\ \hat{r}\ \cdot r^2\sin\theta\ d\theta\ d\varphi\ \hat{r} =$$

$$P = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{I\,\Delta l}{2\lambda}\right)^2 \eta\sin^3\theta\ d\theta d\varphi = \left(\frac{I\,\Delta l}{2\lambda}\right)^2 \eta\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \sin^3\theta\ d\theta d\varphi$$

$$P = \left(\frac{I\,\Delta l}{2\lambda}\right)^2 \eta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin^3\theta\, d\theta = \left(\frac{I\,\Delta l}{2\lambda}\right)^2 \eta\, 2\pi \int_0^{\pi} \sin^3\theta\, d\theta =$$

Pero:

$$\int_0^{\pi} \sin^2\theta \sin\theta d\theta = \int_0^{\pi} \left(1-\cos^2\theta\right)\sin\theta d\theta = -\cos\theta\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{3}\cos^3\theta\Big|_0^{\pi} =$$

$$= 1-(-1)+\frac{1}{3}(-1-1) = 2-\frac{2}{3} = \frac{4}{3}$$

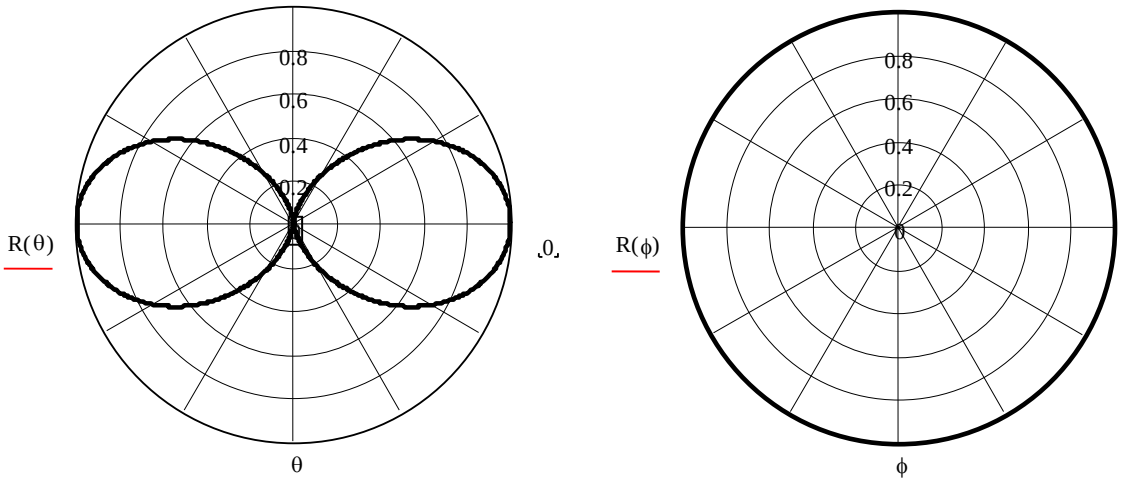
$$P = \left(\frac{I\,\Delta l}{2\lambda}\right)^2 \eta\, 2\pi \frac{4}{3} = \frac{(I\,\Delta l\,\beta)^2}{6\pi}\eta \qquad (5.16)$$

En el espacio libre el valor de η es 120 π por lo que en este caso,

$$P = \frac{(I\,\Delta l\,\beta)^2}{6\pi} 120\pi = 20(I\,\Delta l\,\beta)^2$$

5-1.2 Parámetros del Patrón de radiación.

Analizando de nuevo la expresión (5.13) se observa que las dependencias radial y angular están claramente desacopladas. La primera es una función de onda esférica, en tanto que el segundo factor representa una variación angular de la forma $\sin^2\theta$. En el caso general esta variación puede ser cualquiera, dependiendo no sólo del ángulo de elevación sino también del azimut φ. Si se grafica la densidad de potencia en función de estos dos ángulos se obtiene una figura tridimensional como la mostrada en la figura 5.2. Sin embargo, muchas veces interesa el comportamiento de la antena en términos de cada una de estas variables angulares por separado. Esto corresponde a la intersección de este diagrama tridimensional con un plano dado, ya sea de θ = constante o φ = constante. Para hacer estos diagramas independientes del sistema de coordenadas elegido se acostumbra referirlos más bien a los campos, de manera que en lo sucesivo se hablará del plano H o del plano E, para referirse a estos planos característicos, y a los respectivos patrones de radiación. En el caso del dipolo corto el campo eléctrico tiene dirección θ y su patrón de radiación en ese plano tiene la forma $\sin^2\theta$. En el plano H no hay variación angular y se dice que la antena presenta un comportamiento omnidireccional.



Patron de Radiación Plano-E Patron de Radiación Plano-H

Figura 104

Además de la presentación polar, es muy común la representación cartesiana. Finalmente, en ocasiones se utiliza otra representación cartesiana donde en el eje horizontal se presenta como variable independiente el seno del ángulo de elevación en lugar del propio ángulo. Esto es equivalente al espectro angular de ondas planas introducido en el capítulo 3.

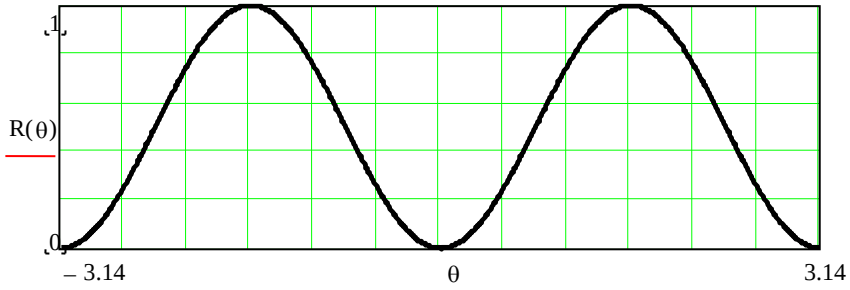


Figura 105 Patrón cartesiano Plano – E. Dipolo corto

En general, los lóbulos que constituyen el patrón de radiación son de diferentes tamaños y tienen diferentes aplicaciones prácticas en los sistemas de comunicaciones. El elemento de mayor tamaño se le denomina lóbulo principal y los otros son denominados lóbulos laterales, o lóbulos menores.

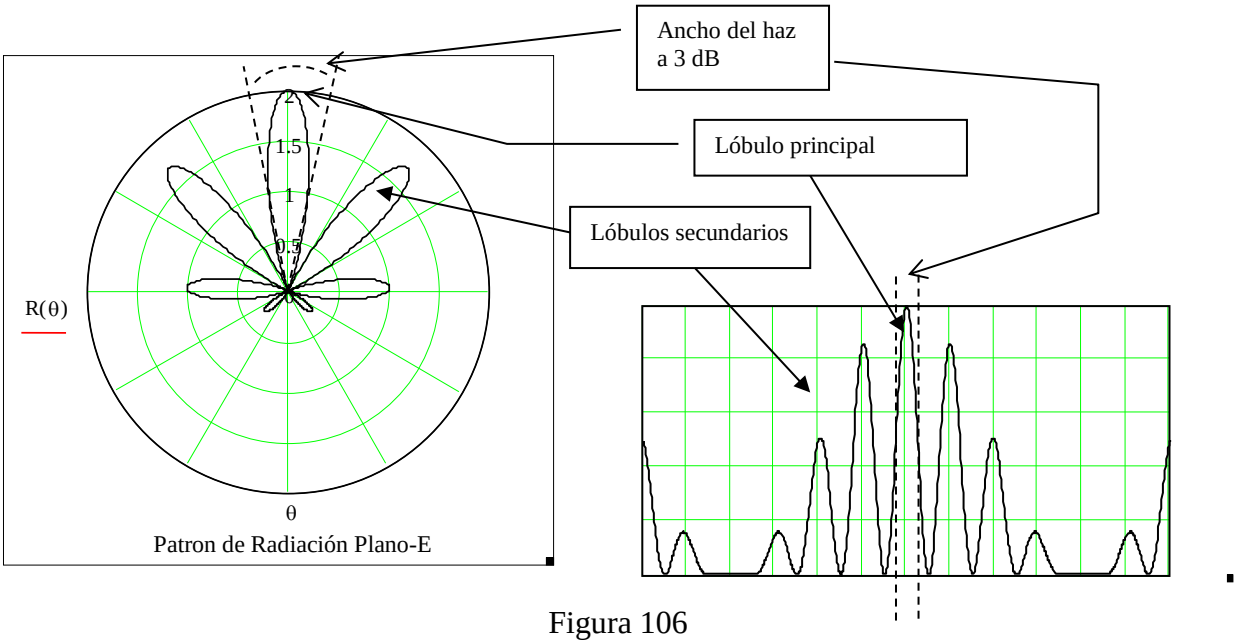


Figura 106

Un parámetro importante de una antena directiva es la relación de las amplitudes de los lóbulos laterales al lóbulo principal. Se define como:

$$SLL_{dB} = 10\log\left|\frac{Pot(lóbulo\ lateral)}{Pot(lóbulo\ \ principal)}\right|$$

Otro parámetro igualmente importante es el "Front-to-Back Ratio" que representa la cantidad de potencia irradiada hacia atrás con respecto al principal.

Los patrones de radiación se clasifican en tres tipos tomando en cuenta la dirección del (los) lóbulo(s) principal(es) con relación a las fuentes: broadside, intermediate y endfire. El dipolo eléctrico corto tiene un patrón de radiación tipo broadside.

5-2 Representación en términos de componentes transversales y radiales

En la sección 5.1 se desarrollaron las expresiones de los campos a partir de las expresiones generales para luego particularizar a las componentes transversales y longitudinales de los mismos cuando se realiza el comportamiento tanto en el campo cercano como en el lejano. Sin embargo, en ocasiones es conveniente tratar con estas componentes desde el principio lo cual permite anticipar algunos resultados. Para empezar se escribirán tanto el operador vectorial como los campos en términos de sus componentes:

$$\nabla = \nabla_t + \frac{\partial}{\partial r}\hat{\mathbf{r}} \qquad \vec{A} = \vec{A}_t + A_r\hat{\mathbf{r}} \qquad \vec{E} = \vec{E}_t + E_r\hat{\mathbf{r}} \qquad \vec{H} = \vec{H}_t + H_r\hat{\mathbf{r}}$$

Los campos se hallan de la expresión $\begin{cases} \vec{E} = -j\omega\vec{A} + \dfrac{1}{\mu\varepsilon}\dfrac{1}{j\omega}\nabla\left(\nabla\cdot\vec{A}\right) \\ \vec{H} = \dfrac{1}{\mu}\nabla\times\vec{A} \end{cases}$

La divergencia vale: $\nabla\bullet\vec{A} = \left(\nabla_t + \dfrac{\partial}{\partial r}\hat{\mathbf{r}}\right)\bullet\left(\vec{A}_t + A_r\hat{\mathbf{r}}\right) = \nabla_t\bullet\vec{A}_t + \dfrac{\partial}{\partial r}A_r$

El gradiente de esta divergencia es:

$$\nabla\left(\nabla\bullet\vec{A}\right) = \left(\nabla_t + \frac{\partial}{\partial r}\hat{\mathbf{r}}\right)\left(\nabla_t\bullet\vec{A}_t + \frac{\partial}{\partial r}A_r\right) =$$

$$= \nabla_t\left(\nabla_t\bullet\vec{A}_t\right) + \frac{\partial}{\partial r}\nabla_t A_r + \frac{\partial}{\partial r}\left(\nabla_t\bullet\vec{A}_t\right)\hat{\mathbf{r}} + \frac{\partial^2}{\partial r^2}A_r\hat{\mathbf{r}}$$

Este resultado se sustituye en la expresión del campo eléctrico:

$$\vec{E} = -j\omega\vec{A} + \frac{1}{j\omega\mu\varepsilon}\nabla\left(\nabla\bullet\vec{A}\right) =$$

$$= -j\omega\left(\vec{A}_t + A_r\hat{\mathbf{r}}\right) + \frac{1}{j\omega\mu\varepsilon}\left[\nabla_t\left(\nabla_t\bullet\vec{A}_t\right) + \frac{\partial}{\partial r}\nabla_t A_r + \frac{\partial}{\partial r}\left(\nabla_t\bullet\vec{A}_t\right)\hat{\mathbf{r}} + \frac{\partial^2}{\partial r^2}A_r\hat{\mathbf{r}}\right]$$

Las componentes son entonces:

$$\vec{E}_t = -j\omega\vec{A}_t + \frac{1}{j\omega\mu\varepsilon}\left[\nabla_t\left(\nabla_t\bullet\vec{A}_t\right) + \nabla_t\frac{\partial}{\partial r}A_r\right]$$

$$E_r = -j\omega A_r + \frac{1}{j\omega\mu\varepsilon}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\nabla_t\bullet\vec{A}_t\right) + \frac{\partial^2}{\partial r^2}A_r\right] \qquad (5.17)$$

Para lograr una mayor simplificación se reescribirá la ecuación de propagación en términos de las componentes transversales y radiales, para todos los puntos del espacio excepto en la fuente, para lo cual se calculará primero el rotor del rotor de A y el Laplaciano:

$$\nabla\times\nabla\times A = \left(\nabla_t + \frac{\partial}{\partial r}\hat{\mathbf{r}}\right)\times\left(\nabla_t + \frac{\partial}{\partial r}\hat{\mathbf{r}}\right)\times\left(\vec{A}_t + A_r\hat{\mathbf{r}}\right)$$

$$\nabla\times\nabla\times A = \left(\nabla_t + \frac{\partial}{\partial r}\hat{\mathbf{r}}\right)\times\left[\left(\nabla_t\times\vec{A}_t + \frac{\partial}{\partial r}\hat{\mathbf{r}}\times\vec{A}_t\right) + \left(\nabla_t\times A_r\hat{\mathbf{r}}\right)\right]$$

$$\nabla\times\nabla\times A = \left[\left(\nabla_t + \frac{\partial}{\partial r}\hat{\mathbf{r}}\right)\times\left(\nabla_t\times\vec{A}_t + \frac{\partial}{\partial r}\hat{\mathbf{r}}\times\vec{A}_t\right) + \left(\nabla_t + \frac{\partial}{\partial r}\hat{\mathbf{r}}\right)\times\left(\nabla_t\times A_r\hat{\mathbf{r}}\right)\right]$$

$$\nabla^2\vec{A} = \nabla_t^2\vec{A}_t + \frac{\partial}{\partial r}\left(\nabla_t\bullet\vec{A}_t\right)\hat{\mathbf{r}} + \frac{\partial}{\partial r}\nabla_t A_r + \frac{\partial^2}{\partial r^2}A_r\hat{\mathbf{r}} - \left(\nabla_t\times\nabla_t\times A_r\hat{\mathbf{r}}\right) - \hat{\mathbf{r}}\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(\nabla_t\bullet\vec{A}_t\right)\right) + \frac{\partial^2}{\partial r^2}\vec{A}_t$$

$$\nabla^2\vec{A} = \nabla_t^2\vec{A}_t + \frac{\partial^2}{\partial r^2}A_r\hat{\mathbf{r}} + \nabla_t^2 A_r\hat{\mathbf{r}} + \frac{\partial^2}{\partial r^2}\vec{A}_t$$

Este resultado se sustituye en la ecuación de propagación de manera que:

$$\nabla_t^2 \vec{A}_t + \frac{\partial^2}{\partial r^2}\vec{A}_t + k_0^2 \vec{A}_t + \nabla_t^2 A_r \hat{\mathbf{r}} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} A_r \hat{\mathbf{r}} + k_0^2 A_r \hat{\mathbf{r}} = 0$$

La cual a su vez puede separarse en una ecuación vectorial y otra escalar:

$$\nabla_t^2 \vec{A}_t + \frac{\partial^2}{\partial r^2}\vec{A}_t + k_0^2 \vec{A}_t = 0$$

$$\nabla_t^2 A_r + \frac{\partial^2}{\partial r^2} A_r + k_0^2 A_r = 0$$

La sustitución en 5.16 produce finalmente:

$$\begin{aligned} \vec{E}_t &= -j\omega\vec{A}_t + \frac{1}{j\omega\mu\varepsilon}\left[\nabla_t\left(\nabla_t \bullet \vec{A}_t\right) + \nabla_t \frac{\partial}{\partial r} A_r\right] \\ E_r &= \frac{1}{j\omega\mu\varepsilon}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\nabla_t \bullet \vec{A}_t\right) - \nabla_t^2 A_r\right] \end{aligned} \qquad (5.18)$$

Por otra parte, el campo magnético se halla de:

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu}\nabla \times \vec{A} = \frac{1}{\mu}\left(\nabla_t + \frac{\partial}{\partial r}\hat{\mathbf{r}}\right) \times \left(\vec{A}_t + A_r\hat{\mathbf{r}}\right) = \frac{1}{\mu}\left[\nabla_t \times \vec{A}_t + \nabla_t \times A_r\hat{\mathbf{r}} + \frac{\partial}{\partial r}\hat{\mathbf{r}} \times \vec{A}_t + \frac{\partial}{\partial r}\hat{\mathbf{r}} \times A_r\hat{\mathbf{r}}\right]$$

El último término es nulo, por lo que finalmente las componentes son:

$$\begin{aligned} \vec{H}_t &= \frac{1}{\mu}\left(\nabla_t A_r \times \hat{\mathbf{r}} + \frac{\partial}{\partial r}\hat{\mathbf{r}} \times \vec{A}_t\right) = \frac{1}{\mu}\left(\nabla_t A_r - \frac{\partial}{\partial r}\vec{A}_t\right) \times \hat{\mathbf{r}} \\ H_r &= \frac{1}{\mu}\left(\nabla_t \times \vec{A}_t\right) \bullet \hat{\mathbf{r}} \end{aligned} \qquad (5.19)$$

Como todos los operadores transversales contienen un término (1/r) es de esperarse que a grandes distancias los términos dominantes sean las componentes transversales.

5-2.1 Aproximación de campo lejano.

Si se observa que $\nabla_t = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\hat{\theta} + \frac{1}{r \operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\hat{\varphi}$, entonces a grandes distancias los términos que contienen este operador serán despreciables porque los campos no presentan variaciones angulares bruscas. En consecuencia las ecuaciones 5.17 y 5.18 pueden reescribirse como:

$$\begin{aligned} \vec{E}_t &= -j\omega\vec{A}_t \\ E_r &= 0 \end{aligned} \qquad (5.20)$$

$$\vec{H}_t = -\frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial}{\partial r}\vec{A}_t\right)\times\hat{\mathbf{r}}$$
$$H_r = 0 \qquad (5.21)$$

Esto significa que en el campo lejano los campos eléctricos y magnéticos son exclusivamente transversales, es decir constituyen un modo TEM. Adicionalmente se puede notar que la dirección del campo eléctrico es la misma de la componente transversal del vector potencial magnético, en tanto que el campo magnético es perpendicular a dicha componente. Más aún, ya que los campos siguen una ley del tipo "Onda esférica", a grandes distancias la derivada $\frac{\partial}{\partial r} \cong -j\beta = -j\,\omega\sqrt{\mu\varepsilon}$. En consecuencia, el término transversal del campo magnético queda:

$$\vec{H}_t = -\frac{1}{\mu}\left(-\,j\omega\sqrt{\mu\varepsilon}\;\vec{A}_t\right)\times\mathbf{r} = j\frac{\omega}{\sqrt{\mu/\varepsilon}}(\vec{A}_t\times\hat{\mathbf{r}})$$
por lo que finalmente
$$\vec{H}_t = \frac{1}{\eta}(\hat{\mathbf{r}}\times\vec{E}_t) \qquad (5.22)$$

Como era de esperarse.

Estos mismos resultados se obtienen haciendo la aproximación en el operador ∇ y sustituyendo en la expresión de $\vec{E} = -j\omega\vec{A} + \frac{1}{\mu\varepsilon}\frac{1}{j\omega}\nabla\left(\nabla\bullet\vec{A}\right)$

A grandes distancias el operador ∇ se reduce esencialmente a $\nabla \cong \hat{\mathbf{r}}\frac{\partial}{\partial r}$ porque las derivadas angulares son despreciables (si no hay discontinuidades en los campos).

Entonces, $\left(\nabla\bullet\vec{A}\right)\cong\left(\hat{\mathbf{r}}\frac{\partial}{\partial r}\bullet\vec{A}\right) = \frac{\partial}{\partial r}\left(\hat{\mathbf{r}}\bullet\vec{A}\right)$

y, en consecuencia, $\nabla\left(\nabla\bullet\vec{A}\right)\cong\hat{\mathbf{r}}\frac{\partial}{\partial r}\left(\hat{\mathbf{r}}\frac{\partial}{\partial r}\bullet\vec{A}\right) = \hat{\mathbf{r}}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(\hat{\mathbf{r}}\bullet\vec{A}\right)\right) = \hat{\mathbf{r}}\frac{\partial^2}{\partial^2 r}\left(\hat{\mathbf{r}}\bullet\vec{A}\right)$

Finalmente, $\nabla\left(\nabla\bullet\vec{A}\right)\cong -\beta^2\left(\vec{A}\bullet\hat{\mathbf{r}}\right)\hat{\mathbf{r}}$

Al sustituir en la expresión de E se obtiene:

$$\vec{E} = -j\omega\vec{A} - \frac{\omega^2\mu\varepsilon}{\mu\varepsilon\;j\omega}\left(\vec{A}\bullet\hat{\mathbf{r}}\right)\hat{\mathbf{r}} = -j\omega\vec{A} + j\omega\left(\vec{A}\bullet\hat{\mathbf{r}}\right)\hat{\mathbf{r}} = -j\omega\vec{A}_t \qquad (5.23)$$

Aquí se ha definido un término A_t como:

$$\vec{A}_t = \vec{A} - \left(\vec{A} \bullet \hat{\mathbf{r}}\right)\hat{\mathbf{r}} \tag{5.24}$$

Es evidente que A_t consiste solamente de las componentes transversales de A pues el sustraendo es la componente radial de dicho vector.

5-3 Campo radiado por un dipolo magnético

El próximo elemento a considerar es una pequeña espira de radio "b" por la que circula una corriente "I". La espira yace sobre el plano (x,y) y su centro se halla sobre el origen de coordenadas.

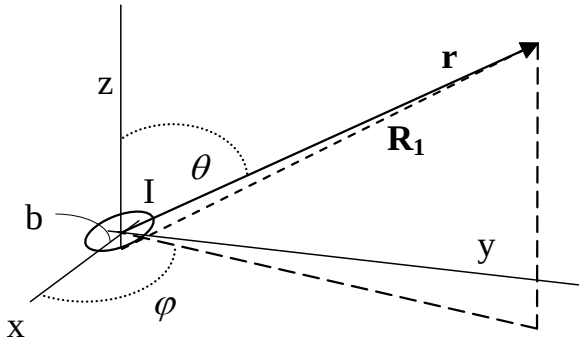


Figura 107

El punto de observación se halla a la distancia "r" del centro de la espira, y la distancia genérica a uno de los puntos de la espira se denotará por "R_1". Si se considera un pequeño elemento de la espira de longitud "dl", la contribución al campo será:

$$d\vec{A} = \frac{\mu}{4\pi}\frac{e^{-j\beta R_1}}{R_1} I\, d\vec{l}$$

y el campo total será la integral,

$$\vec{A} = \frac{\mu I}{4\pi}\oint \frac{e^{-j\beta R_1}}{R_1} d\vec{l} \tag{5.25}$$

Esta integral es bastante difícil de resolver porque R_1 varía con la ubicación del diferencial "dl" sobre la espira.

Sin embargo, si se asume que la espira es pequeña, es decir b<<r, entonces se puede escribir:

$$e^{-j\beta R_1} = e^{-j\beta r}\, e^{-j\beta(R_1 - r)} \cong e^{-j\beta r}\left(1 - j\beta\left(R_1 - r\right)\right)$$

Al sustituir en (5.18) se obtiene,

$$\vec{A} = \frac{\mu I}{4\pi} e^{-j\beta r}\left((1 + j\beta r)\oint \frac{1}{R_1} d\vec{l} - j\beta \oint d\vec{l} \right)$$

La segunda integral es cero. Para calcular la primera integral se proyecta "dl" en la dirección de R_1, de manera que,

$$\oint \frac{1}{R_1} d\vec{l} = 2b \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin \varphi'}{R_1} d\varphi'$$

donde φ' es un elemento de ángulo azimutal. De la geometría de la estructura se obtiene,

$$R_1^2 = r^2 + b^2 - 2br\sin\theta\sin\varphi'$$

$$R_1^{-1} = r^{-1}\left[1 + \frac{b^2}{r^2} - \frac{2b}{r}\sin\theta\sin\varphi' \right]^{-1/2}$$

y como r>>b, entonces,

$$R_1^{-1} \cong r^{-1}\left[1 + \frac{b}{r}\sin\theta\sin\varphi' \right]$$

Finalmente, la integral vale,

$$\oint \frac{1}{R_1} d\vec{l} \cong 2br^{-1} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[1 + \frac{b}{r}\sin\theta\sin\varphi' \right] \sin\varphi' \, d\varphi' \, \hat{\varphi} = 2br^{-1}\left[\frac{b}{r}\sin\theta \right] \frac{\pi}{2}\hat{\varphi} =$$

$$\oint \frac{1}{R_1} d\vec{l} \cong \left[\frac{b}{r} \right]^2 \pi \sin\theta \, \hat{\varphi}$$

y el potencial magnético será,

$$\vec{A} = \frac{\mu I}{4\pi} e^{-j\beta r}\left[(1 + j\beta r)\left(\frac{b}{r} \right)^2 \pi \sin\theta \right] \hat{\varphi}$$

La cantidad "$\pi b^2 I$"es el momento "m" de la espira, por lo que,

$$\vec{A} = \frac{\mu m}{4\pi} e^{-j\beta r}\left[(1 + j\beta r)\left(\frac{1}{r} \right)^2 \sin\theta \right] \hat{\varphi} \qquad (5.26)$$

El campo magnético se obtiene de,

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu}\nabla\times\vec{A} = \frac{1}{\mu}\frac{\mu m}{4\pi}\nabla\times\left\{e^{-j\beta r}\left[\left(1+j\beta r\right)\frac{1}{r^2}\sin\theta\,\hat{\varphi}\right]\right\} =$$

$$= \frac{m}{4\pi}\nabla\left\{e^{-j\beta r}\left[\left(1+j\beta r\right)\frac{1}{r^2}\sin\theta\right]\right\}\times\hat{\varphi}$$

El campo magnético posee componentes tanto en dirección radial como en elevación,

$$H_R = \frac{m}{4\pi}\left[\frac{1}{r}+\frac{1}{r^2}\right]\frac{e^{-j\beta r}}{r}\cos\theta$$

$$H_\theta = \frac{m}{4\pi}\left[-\beta^2+\frac{2j\beta}{r}+\frac{2}{r^2}\right]\frac{e^{-j\beta R}}{r}\sin\theta$$

Por otra parte, el campo eléctrico tiene sólo componente azimutal porque :

$$E_r = -c\left(\nabla_t \bullet \vec{A}_t\right) = -c\frac{1}{\mathrm{r}\sin\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi} = 0$$

Adicionalmente, no hay componente radial de A por lo que la componente transversal se reduce a :

$$\vec{E}_t = -j\omega\vec{A}_t + \frac{1}{j\omega\mu\varepsilon}\nabla_t\left(\nabla_t \bullet \vec{A}_t\right) - \nabla_t A_r =$$

$$= -j\omega\left(\frac{\mu m}{4\pi}\right)e^{-j\beta r}\left(1+j\beta r\right)\left(\frac{1}{r^2}\right)\sin\theta\ \ \hat{\Phi}$$

$$E_\varphi = \frac{j\omega\mu m}{4\pi}\left[\frac{1}{r}+j\beta\right]\frac{e^{-j\beta r}}{r}\sin\theta$$

De igual manera que en el caso del dipolo eléctrico se pueden observar varias regiones: una de comportamiento cuasi-estático, el campo cercano donde existe un modo TE, y el campo lejano o campo de radiación, caracterizado por un modo TEM. En este último caso el campo radiado vale:

$$E_\varphi = \frac{-\beta\omega\mu m}{4\pi}\frac{e^{-j\beta r}}{r}\sin\theta = \frac{-\beta^2\omega\mu m}{4\pi\omega\sqrt{\mu\varepsilon}}\frac{e^{-j\beta r}}{r}\sin\theta = \frac{-\beta^2\eta\, m}{4\pi}\frac{e^{-j\beta r}}{r}\sin\theta$$

$$H_\theta = -\beta^2\frac{m}{4\pi}\frac{e^{-j\beta r}}{r}\sin\theta \qquad (5.27)$$

Si se compara este resultado con 5.11 se concluye que el patrón de radiación del dipolo magnético tiene exactamente la misma forma que el del dipolo eléctrico. Observe que el campo eléctrico tiene dirección φ en este caso, en tanto que en el anterior tenía dirección θ.

5-4 Parámetros básicos de un radiador electromagnético

Si se comparan los resultados de la sección anterior con las ecuaciones (5.11) se observa que los campos producidos por el dipolo magnético están en cuadratura, tanto espacial como temporalmente, con los del dipolo hertziano, y por tanto se pueden combinar para obtener una onda de polarización circular.

En ambos casos se puede observar que el campo de radiación se puede expresar como el producto de una función de distancia (la función de onda esférica), por una función de ángulo que define el patrón de radiación de la antena. En muchos sistemas de comunicaciones móviles se usa polarización circular y es fácil distinguir estas antenas por la presencia de una pequeña espira ubicada aproximadamente en la mitad de la longitud del radiador lineal (llamado látigo). En otros casos la antena tiene la apariencia de un resorte helicoidal (comúnmente llamada "rabo de cochino") donde cada espira del helicoide puede considerarse como una combinación de un dipolo de Hertz y una espira plana.

Figura 108. Antenas móviles: (a) Pigtail, (b) Spring coil

La ecuación (5.14) muestra que el vector Poynting está dirigido en la dirección radial,

$$\vec{S} = \vec{E}'' \times \vec{H}'' = \left(\frac{I\,\Delta l}{2\lambda\, r} \right)^2 \eta \sin^2\theta\ \hat{\mathbf{r}}$$

el cual es un número real. La potencia irradiada es la integral de la parte real del vector de Poynting, por lo que

$$\langle P \rangle = \iint \mathrm{Re}\left[\vec{S}\right] \cdot d\vec{a} = \iint \mathrm{Re}\left[S\right] da$$

Si se integra sobre la superficie de una esfera de radio "R", entonces la diferencial de superficie vale da=R^2 dΩ, donde dΩ es un diferencial de ángulo sólido. Entonces,

$$\langle P \rangle = \iint \mathrm{Re}\left[\vec{S}\right] \cdot d\vec{a} = \iint \mathrm{Re}[S]\, da = \iint U\, d\Omega$$

donde se ha definido la cantidad U como U=R^2 Re[S]=R^2<*S*>, la cual se denomina Intensidad de Radiación. De acuerdo a la definición del patrón de campo normalizado (ecuación 5.13) se puede escribir $U(\theta,\varphi) = U_m |F(\theta,\varphi)|^2$

A continuación se definirá la ganancia directiva de una antena como

$$G_D(\theta,\varphi) = \frac{U(\theta,\varphi)}{< P > / 4\pi} = \frac{4\pi U(\theta,\varphi)}{\iint U\, d\Omega} \tag{5.28}$$

Al valor máximo de la ganancia directiva se la denomina directividad,

$$D = G_{D\max} = \frac{U_{\max}}{< U >} = \frac{4\pi U_{\max}}{< P >} \tag{5.29}$$

$$D = \frac{4\pi \left|E_{\max}\right|^2}{\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \left|E(\theta,\varphi)^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi\right|} \tag{5.30}$$

Para un dipolo de Hertz se tiene que

$$U = R^2\, \mathrm{Re}[S] = \frac{(I\,\Delta l)^2}{16\pi^2} \eta\, \beta^2 \sin^2\theta \tag{5.31}$$

y la ganancia directiva será:

$$G_D = \frac{(I\,\Delta l)^2}{16\pi^2} \eta\, \beta^2 \sin^2\theta \frac{4\pi}{\frac{(I\,\Delta l)^2}{16\pi^2} \eta\, \beta^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sin^2\theta \sin\theta\, d\theta\, d\varphi} =$$

$$G_D = \frac{3}{2} \sin^2\theta \tag{5.32}$$

La directividad del dipolo hertziano es por tanto 1,5.

Utilizando la definición de F(θ,φ), la ecuación 5.22 puede reescribirse como

$$G_D(\theta,\varphi) = \frac{|F(\theta,\varphi)|^2}{\frac{1}{4\pi} \iint |F(\theta,\varphi)|^2\, d\Omega} = \frac{4\pi}{\Omega_A} |F(\theta,\varphi)|^2 \tag{5.33}$$

En consecuencia, la directividad vale:

$$D = \frac{4\pi}{\Omega_A} \tag{5.34}$$

En estas expresiones se ha definido:

$$\Omega_A = \iint |F(\theta,\varphi)|^2 \, d\Omega \tag{5.35}$$

Este es el "ángulo sólido del haz" (también llamado "ancho del haz"), el cual sería el ángulo sólido de un cono en el que estuviera concentrada toda la radiación de la antena con una intensidad constante. En la práctica esta valor es cercano al producto de los ángulos de potencia mitad de los patrones de radiación –E y –H. Esto significa además que la directividad de una antena es inversa del ancho del haz: una antena más directiva tiene un lóbulo principal más estrecho

Cuando se utilizan antenas prácticas se acostumbra utilizar un término ligeramente diferente: la GANANCIA. Debido a que en las antenas reales existen pérdidas disipativas, la potencia irradiada es menor que la potencia entregada por el generador. Se define entonces como Ganancia de una antena al cociente:

$$G_0 = \frac{4\pi U_{\max}}{< P_i >} \tag{5.36}$$

donde $<P_i>$ es la potencia promedio entregada por el generador a la antena. La Ganancia de una antena es igual a la Directividad cuando no existen pérdidas.

El cociente $U_0=<P_i>/4\pi$ representa la intensidad de radiación producida por una fuente que irradiase por igual en todas las direcciones del espacio. Si bien tal fuente no existe en la práctica, es muy conveniente su utilización como antena de referencia en muchas situaciones reales. Tal antena ideal se conoce con el nombre de antena isotrópica. La Ganancia puede entonces escribirse como,

$$G_0 = \frac{U_{\max}}{U_0} \tag{5.37}$$

que puede interpretarse como: "La Ganancia de una antena es la relación entre la máxima intensidad de radiación y la producida por una antena isotrópica de referencia alimentada con la misma potencia de entrada":

En ocasiones se pueden utilizar como referencia otras antenas diferentes de la isotrópica y se puede definir una ganancia respecto de tal antena como,

$$G_r = \frac{U_{max}}{U_r} \tag{5.38}$$

donde U_r es la intensidad de radiación producida por la antena de referencia alimentada con la misma potencia de entrada, en la dirección de máxima radiación de la antena en estudio. Si α es la eficiencia de radiación de la antena definida como,

$$\alpha = \frac{\langle P \rangle}{\langle P_i \rangle}$$

entonces, se tiene que,

$$G_0 = \alpha D \tag{5.39}$$

Adicionalmente,

$$G_0 = \alpha \frac{4\pi}{\Omega_A} \tag{5.40}$$

Si se comparan las ecuaciones (5.28) y (5.35) se tiene que :

$$U_{max} = \frac{< P > D}{4\pi} = \frac{< P_i > G_0}{4\pi} = \frac{PIRE}{4\pi} \tag{5.41}$$

En esta expresión se ha definido el termino PIRE (Potencia Isotrópica Radiada Equivalente) como el producto de la potencia de entrada por la Ganancia de la Antena Transmisora y representa la Potencia con la que se tendría que estar alimentando a una Antena Isotrópica a fin de producir la misma Intensidad de Radiación.

5-4.1 Resistencia de radiación

Si se asume que no existen pérdidas en el radiador, entonces se puede considerar (desde el punto de vista del generador) que la potencia de radiación es igual a la potencia que se disiparía en una resistencia equivalente por la que circula la corriente del dipolo. Para el caso del dipolo de Hertz en el espacio libre esta potencia vale,

$$\langle P \rangle = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{(I\,\Delta l)^2}{16\pi^2} \eta\, \beta^2 \sin^2\theta \sin\theta\, d\theta\, d\varphi =$$

$$\langle P \rangle = \frac{(I\,\Delta l)^2}{16\pi^2} \eta\, \beta^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin^2\theta \sin\theta\, d\theta =$$

$$\langle P \rangle = \frac{(I\Delta l)^2}{16\pi^2} 2\pi \frac{4}{3} \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 120\pi = I^2 80\pi^2 \left(\frac{\Delta l}{\lambda}\right)^2$$

por lo que la resistencia de radiación será

$$R_{rad} = 80\pi^2 \left(\frac{\Delta l}{\lambda} \right)^2 \qquad (5.42)$$

Es importante notar que esta resistencia de radiación será también la resistencia del generador equivalente cuando la antena esté actuando como receptora. De igual manera que una resistencia real, esta resistencia equivalente será también una fuente de ruido térmico que se estará entregando al receptor conjuntamente con la señal. En los enlaces terrestres este ruido térmico será debido casi exclusivamente a la agitación molecular de las partículas a la temperatura ambiente. Sin embargo, en el caso de enlaces satelitales, la antena captará también ruido térmico de nuestra propia galaxia, así como de la tierra que rodea a la antena (a través de sus lóbulos laterales) lo cual degradará la relación señal a ruido a la entrada del receptor.

Otra cantidad equivalente de interés es la llamada área efectiva de la antena, la cual se discutirá en la próxima sección.

5-5 La antena como receptor

Hasta el momento se han estudiado los campos producidos en el espacio por la circulación de corrientes a través de conductores. Sin embargo, tales campos a su vez pueden inducir voltajes y corrientes en conductores. En tales condiciones la función de la antena es ahora recoger una porción de la energía radiada (por otra antena) para llevarla a algún dispositivo. Generalmente, en los sistemas de comunicaciones, tal dispositivo es un receptor cuya función consiste en extraer la información que ha sido enviada en la portadora de alta frecuencia. La experiencia práctica y la intuición nos permiten adelantar que el comportamiento de la antena como receptora no debería diferir apreciablemente de su función como transmisora. En realidad esto es cierto sólo bajo ciertas condiciones que se expresan formalmente por medio del "Teorema de Reciprocidad".

> *"En un sistema lineal, la respuesta en un punto del espacio debido a un estímulo en otro punto no se altera cuando se intercambian el estímulo y la respuesta".*

Las soluciones generales de las ecuaciones de Maxwell son ondas que viajan en direcciones opuestas en el espacio. En el caso de las fuentes se han hallado dos soluciones, una progresiva y una regresiva, pero se ha desechado la solución regresiva para el caso del espacio sin fronteras

y libre de otras fuentes. Sin embargo, si se dispusiera de un conjunto de fuentes que irradiaran en dirección al origen con magnitudes y fases correspondientes al campo de radiación de la antena, entonces sería admisible la solución regresiva. Sin embargo, aún en el caso general, se considerará que existe un cierto flujo de potencia en dirección al origen (donde está la antena receptora).

El campo eléctrico en el origen debido a las fuentes externas dará origen a un voltaje inducido el cual puede ser entregado como potencia útil a una carga conectada a la antena. La resistencia de radiación será ahora la impedancia del generador equivalente como sigue:

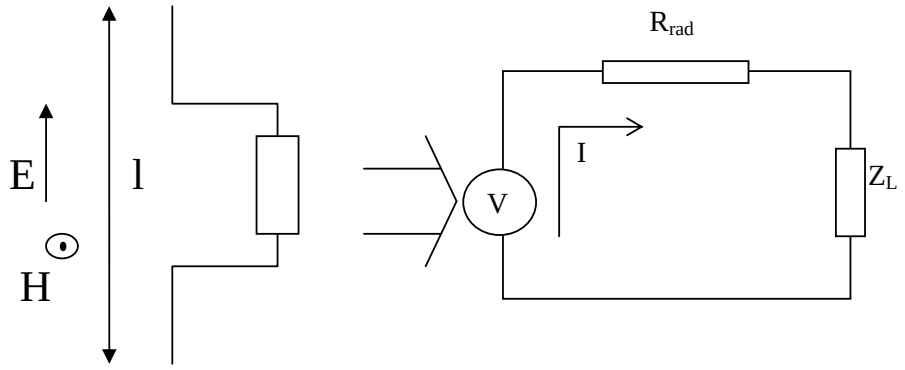


Figura 109

donde,

$$V = \int_0^l \vec{E} \cdot d\vec{l} \tag{5.43}$$

Este voltaje, a su vez, produce una circulación de corriente

$$I = \frac{V}{(R_{rad} + Z_L)} \tag{5.44}$$

la cual a su vez produce una radiación hacia el espacio (esto se puede utilizar para variar el comportamiento de una antena al agregarle elementos parásitos como directores o reflectores). Eventualmente este campo re-irradiado alcanza la fuente e induce en ella una tensión, de manera que ahora se tiene el siguiente sistema:

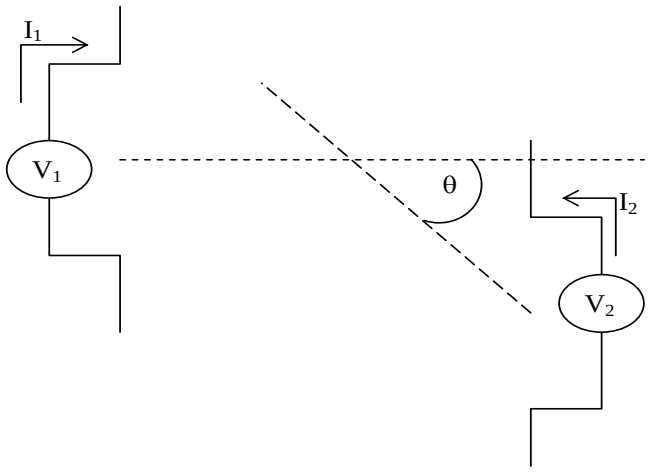


Figura 110

Si se asumen las corrientes en los generadores como las excitaciones y las tensiones como las respuestas, entonces se puede escribir:

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} \tag{5.45}$$

donde todos los efectos del medio y la propagación están incluidos en Z_{ij}. Si el medio es lineal e isotrópico (aunque no necesariamente homogéneo), entonces la matriz es simétrica y por tanto $Z_{21}=Z_{12}$. Por tanto, las matrices de impedancia y admitancia de sistemas lineales pasivos recíprocos son simétricas. Al cambiar el ángulo θ los valores de Z_{ij} pueden cambiar pero la condición de reciprocidad se mantiene. Si las antenas se hallan suficientemente alejadas una de la otra, los términos Z_{12} y Z_{21} son mucho más pequeños que Z_{11} y Z_{22}, lo cual permite definir una impedancia de entrada de cada antena independientemente de la otra. Sin embargo, cuando la segunda antena está en el campo cercano de la primera, el acoplamiento entre ambas provisto por Z_{12} y Z_{21} afecta la impedancia de entrada; esto ocurre cuando existen elementos parásitos en la antena u otros elementos como la posteadura o el efecto de la reflexión en tierra. Estas corrientes inducidas afectan también el patrón de radiación ya que constituyen fuentes de radiación adicionales.

De manera similar a lo discutido en el capítulo 3, es posible definir parámetros de dispersión para este sistema entrada-salida constituido por ambas antenas:

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$$

Entonces, y con el mismo razonamiento anterior, los términos S_{12} y S_{21} deben ser iguales porque la red es simétrica. En el campo lejano su valor es pequeño por lo que el coeficiente de reflexión de cada antena se podrá definir por separado, y en consecuencia, las medidas correctivas (si fueren necesarias) se podrán hacer sobre cada antena sin tener que tomar en cuenta la interacción con la otra. La ventaja de utilizar parámetros de dispersión está en que en la práctica se pueden usar los analizadores de redes para medir los patrones de radiación, así como la ganancia y la directividad de las antenas, por ejemplo cuando se usa una cámara anecoica. También es posible utilizar un analizador de redes en los casos cuando no se tenga acceso al extremo transmisor: en este caso se usa una antena auxiliar (de referencia) conectada como puerto (1) y la otra antena al puerto (2), y todas las medidas se harán relativas a la antena de referencia, para después corregirlas a los valores absolutos como se muestra en la siguiente figura:

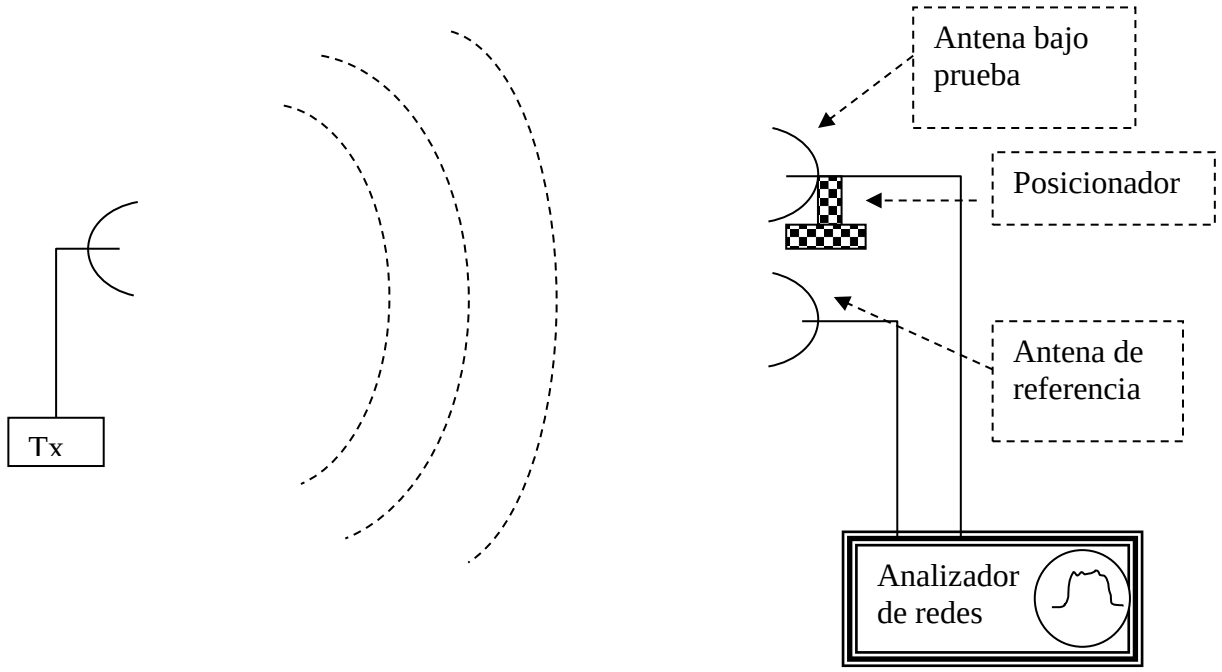


Figura 111

El patrón de recepción de una antena es una gráfica de la potencia entregada por la fuente a su carga acoplada debido a una onda plana que incide sobre la antena a diferentes ángulos. En el campo lejano, el campo irradiado es una onda TEM esférica, que puede ser considerado como una onda localmente plana en la región donde se halla la antena receptora. Debido al teorema de

reciprocidad se puede establecer entonces que el patrón de recepción de una antena es idéntico a su patrón de radiación.

La potencia absorbida por la carga puede ser relacionada con la densidad de potencia a través de un área equivalente o efectiva:

$$A_e = \frac{\text{Pot absorbida}}{\text{Densidad de potencia}} \tag{5.46}$$

Debe notarse que esta expresión depende de la potencia absorbida por la carga, la cual es función de su impedancia. Si dicha impedancia es la imagen de la impedancia de radiación entonces el área efectiva será máxima. El área efectiva puede relacionarse con la ganancia de la siguiente forma: el teorema de reciprocidad establece que el patrón de recepción es idéntico al patrón de radiación. Por tanto, si se tienen dos antenas sobre las cuales incide la misma densidad de potencia (de una onda plana), entonces la relación entre las áreas efectivas será igual a la razón de las potencias recibidas, y por tanto será igual al cociente de las ganancias:

$$\frac{\langle P_1 \rangle}{\langle P_2 \rangle} = \frac{A_1}{A_2} = \frac{G_1}{G_2} = \frac{\alpha_1 D_1}{\alpha_2 D_2} \tag{5.47}$$

Si ahora, se asume que la primera antena es la isotrópica, entonces, $G_1=1$ porque $\alpha_1=1$ y $D_1=1$.

Entonces, $A_1 = \frac{A_2}{\alpha_2 D_2}$ para cualquier antena. Para un dipolo corto, y asumiendo que $\alpha_2=1$, se tiene que la tensión inducida será la integral,

$$V = \int \vec{E} \cdot d\vec{l} = E\,\Delta l$$

La potencia entregada a la carga acoplada será,

$$\langle P_2 \rangle = \left(\frac{V}{2}\right)^2 \frac{1}{R_{rad}} = \left(\frac{E\ \Delta l}{2}\right)^2 \frac{1}{R_{rad}} = \text{Re}[S] A_2 = E^2 \frac{1}{\eta} A_2 \tag{5.48}$$

Por tanto,

$$A_2 = \left(\frac{\Delta l}{2}\right)^2 \frac{\eta}{R_{rad}} = \left(\frac{\Delta l}{2}\right)^2 \frac{\eta}{80\pi^2 \left(\frac{\Delta l}{\lambda}\right)^2} = \frac{3}{8}\frac{\lambda^2}{\pi} \tag{5.49}$$

Finalmente,

$$A_1 = \frac{A_2}{\alpha_2 D_2} = \frac{\frac{3}{8}\frac{\lambda^2}{\pi}}{\frac{3}{2}} = \frac{\lambda^2}{4\pi} \tag{5.50}$$

El área efectiva de cualquier antena será por tanto,

$$A_2 = A_1 G_2 = \frac{\lambda^2}{4\pi} G_2 \tag{5.51}$$

la cual es una ecuación fundamental para el cálculo de radio-enlaces.

5-6 Antenas lineales

En los apartes anteriores se han considerado dos antenas ideales: el dipolo eléctrico y el dipolo magnético. Si bien las mismas no existen en la realidad, pueden considerarse como parte de las antenas reales y será necesario considerar el efecto superpuesto de estas antenas elementales para hallar el patrón de radiación de la antena real. Un caso de gran interés práctico lo constituyen las llamadas "antenas lineales", las cuales se forman a partir de distribuciones de corriente ubicada a lo largo de una línea (por conveniencia se elige el eje "z"). Estas antenas tienen simetría axial al igual que los dipolos elementales, por lo que es de esperar solamente una variación en el ángulo θ. El vector potencial magnético vale:

$$\vec{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{4\pi}\iiint \frac{\vec{J}(\mathbf{r}')e^{-j\beta|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}dv' = \frac{\mu}{4\pi}\int \frac{I(z')e^{-j\beta|\mathbf{r}-z'\mathbf{k}|}}{|\mathbf{r}-z'\mathbf{k}|}dz'\,\hat{\mathbf{k}} \tag{5.52}$$

porque las fuentes de corriente se hallan sobre el eje z. En el campo lejano $|\mathbf{r}|=r >> |\mathbf{r}'|$. Esto permite extraer el denominador de la fracción fuera de la integral. Sin embargo, lo mismo no es aplicable al término exponencial. Para hallar una expresión para este término, se comenzará por escribir todas las magnitudes en coordenadas rectangulares.

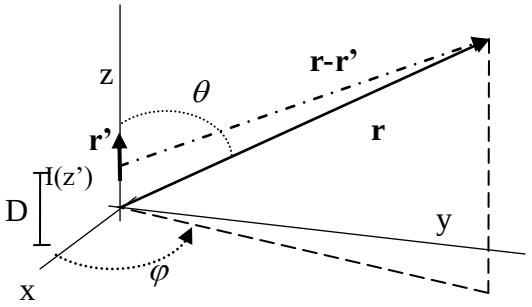


Figura 112

Debido a la simetría axial se puede estudiar el campo en el sólo plano (por ejemplo y-z) y luego rotar los resultados alrededor del eje z.

$$\begin{aligned} r^2 &= y^2 + z^2 \\ y &= r \sin\theta \\ z &= r\cos\theta \\ r' &= z' \end{aligned} \tag{5.53}$$

El término de distancia en la exponencial vale:

$$R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \sqrt{r^2 + \left((z')^2 - 2\,r\,z'\cos\theta\right)} \tag{5.54}$$

Esta expresión se puede expandir usando el teorema del binomio y queda:

$$R \cong r - z'\cos\theta + \frac{(z')^2\cos^2\theta}{2\,r} + ... \tag{5.55}$$

En el campo lejano solamente son significativos los dos primeros términos. El error introducido por el tercer término se puede utilizar como un criterio para delimitar el comienzo del campo lejano (r_{ff}). El criterio es que este error sea un dieciseisavo de la longitud de onda para la mayor dimensión de la antena (D). Sustituyendo se tiene:

$$\frac{(D/2)^2}{2\,r_{ff}} = \frac{\lambda}{16}$$

De aquí se obtiene el criterio: $r_{ff} = \dfrac{2\,D^2}{\lambda}$

Finalmente se tiene:

$$\vec{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{4\pi r}\int I(z')e^{-j\beta(r-z'\cos\theta)}dz'\,\hat{\mathbf{k}} = \frac{\mu}{4\pi}\frac{e^{-j\beta r}}{r}\int I(z')e^{j\beta(z'\cos\theta)}dz'\,\hat{\mathbf{k}}$$
$$\vec{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{4\pi}\frac{e^{-j\beta r}}{r}\int I\left(\frac{z'}{\lambda}\right)e^{j2\pi(z'/\lambda\ \cos\theta)}d\frac{z'}{\lambda}\,\hat{\mathbf{k}} \qquad (5.56)$$

Esta expresión se reconoce como una transformada de Fourier (de hecho es la transformada inversa) que mapea el plano z´/λ en el plano cos θ. A la distribución de corriente I(z´/λ) se le denomina "función de iluminación" de la antena. Esta transformación es similar al "espectro angular de ondas planas" ya discutido en el capítulo 3. Debido a que el valor del coseno está limitado al intervalo (-1,1) para ángulos reales solamente serán "visibles" aquellos lóbulos que se hallen en dicho intervalo, lo cual depende de la "longitud eléctrica" de la antena (D/λ), siendo D la dimensión mayor de la antena. Cuando la antena es pequeña, solamente se aprecia un lóbulo de igual manera que en los dipolos elementales; sin embargo, a medida que la antena se hace más larga eléctricamente el lóbulo principal se estrecha y aparecen nuevos lóbulos laterales que no estaban visibles anteriormente. Como ejemplo de esto consideremos el caso de una antena lineal iluminada uniformemente (Figura 113). La función de iluminación se muestra a la izquierda y su transformada de Fourier a la derecha, la cual es una función Sinc.

Para obtener el campo eléctrico se utilizará la expresión $\vec{E} = -j\omega\vec{A} + \frac{1}{\mu\varepsilon}\frac{1}{j\omega}\nabla\left(\nabla\bullet\vec{A}\right)$, pero aplicando la aproximación de campo lejano. Debido a que en el campo lejano las variaciones radial y transversal están desacopladas se puede reescribir la expresión anterior de A como el producto de una función de onda esférica por una función de directividad

$$\vec{A} = \frac{\mu}{4\pi}\frac{e^{-j\beta r}}{r}f(\theta,\varphi)\,\hat{\mathbf{k}} \qquad (5.57)$$

En el caso presente se tiene que $\vec{A}_t = \left|\vec{A}\right|\sin\theta\ \hat{\theta}$

En consecuencia,
$$\vec{E} = -j\omega\frac{\mu}{4\pi}\frac{e^{-j\beta r}}{r}f(\theta,\varphi)\sin\theta\,\hat{\theta} \qquad (5.58)$$

Al comprar este resultado con la expresión 5.11 se aprecia que tienen la misma forma y sólo difieren en el término f(θ,φ) (el momento del dipolo elemental ha sido absorbido en la función f(θ,φ)). Por esta razón se acostumbra escribir que el patrón de radiación F(θ,φ) es el producto de dos funciones:

$$F(\theta,\varphi) = g(\theta,\varphi)\, f(\theta,\varphi) \tag{5.59}$$

El primer término se le denomina "factor del elemento" (radiador elemental) * y el segundo es el "factor del patrón" (a veces también llamado factor del arreglo, cuando se consideran arreglos de antenas).

5-6.1 Línea de corriente uniforme

Este es un modelo adecuado para representar antenas cortas por cuanto se asume que la intensidad de corriente es constante a lo largo de la línea y no sufre desfase alguno

$$I(z') = \begin{cases} I_0 & para \ \ |z'| \le \dfrac{L}{2} \\ 0 & para\ el\ resto \end{cases} \tag{5.60}$$

Entonces, $f(\theta,\varphi) = \int_{-L/2}^{L/2} I_0\, e^{j2\pi \frac{z'}{\lambda}\cos\theta}\, d\,\frac{z'}{\lambda}$

Aunque esta integral se puede evaluar directamente, vamos a reescribir esto como una transformada de Fourier. De hecho, I(z´) es una función rect(z´) y su transformada es una función sinc (L/λ cos θ).

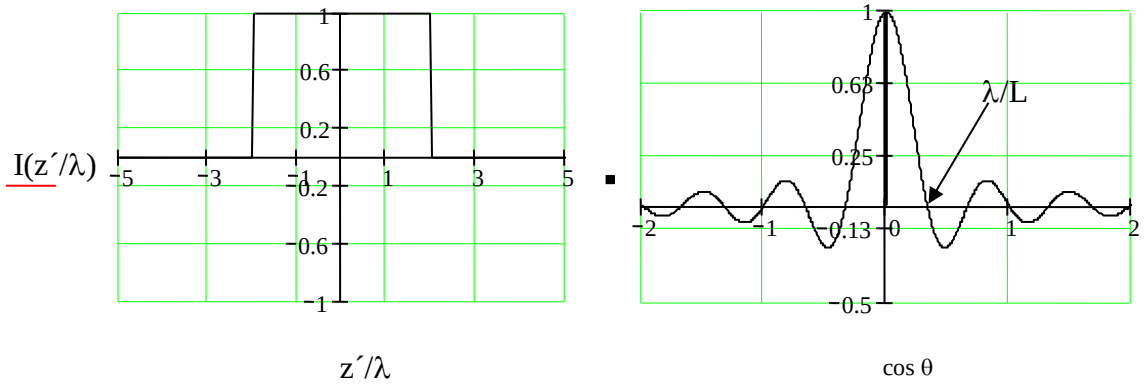


Figura 113. Función de iluminación y su transformada

Una vez que se multiplica por el factor del elemento el patrón resultante es (solo se muestra el módulo porque en la práctica se mide es la potencia):

* Algunos autores interpretan el factor "g" como una onda esférica producida por un elemento de corriente de longitud $\Delta l \sin\theta$ ubicada perpendicularmente a la dirección del observador. Stutzman W., Thiele G. "Antenna Theory and design". John Wiley and sons, 1981, pag 28

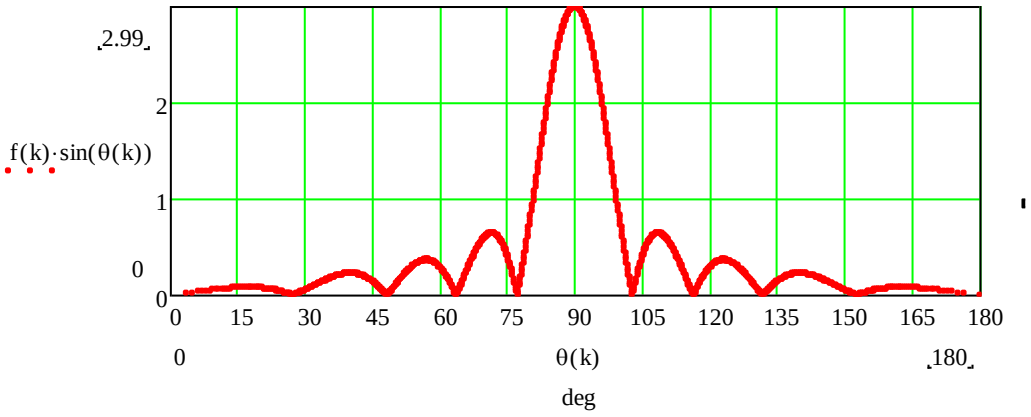


Figura 114. Patrón de radiación cartesiano de una antena lineal con iluminación uniforme

Sin embargo, en la práctica se acostumbra mostrar el patrón de radiación de potencia y usualmente en unidades logarítmicas.

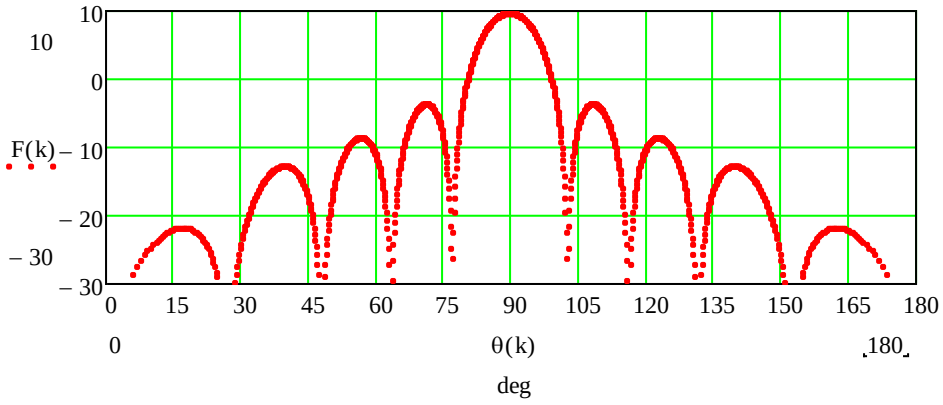


Figura 115. Patrón de radiación cartesiano de una antena lineal con iluminación uniforme en unidades logarítmicas

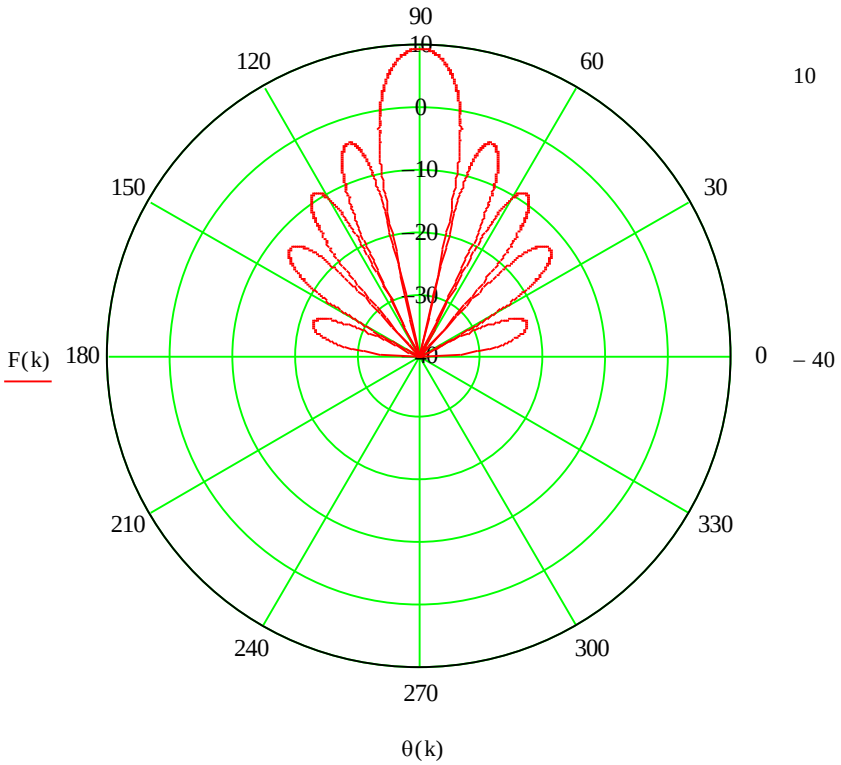


Figura 116. Patrón de radiación polar de la misma antena

Se aprecian claramente el lóbulo principal apuntando en la dirección broadside (90º), así como algunos lóbulos laterales. Debido a que en MathCad el origen de los ángulos es la línea horizontal, la línea de corriente estará ubicada en esta posición y por tanto la dirección broadside es vertical (90º). También debe notarse que en la representación cartesiana sólo se muestra el intervalo de ángulos 0 a 180º, en tanto que en la representación polar se muestra todo el intervalo 0 a 360º. El patrón correspondiente al intervalo 180º a 360º se obtiene rotando el patrón mostrado alrededor de la línea horizontal debido a la simetría axial que presenta este tipo de antena. A efectos de comparación se muestra a continuación el patrón correspondiente al radiador elemental.

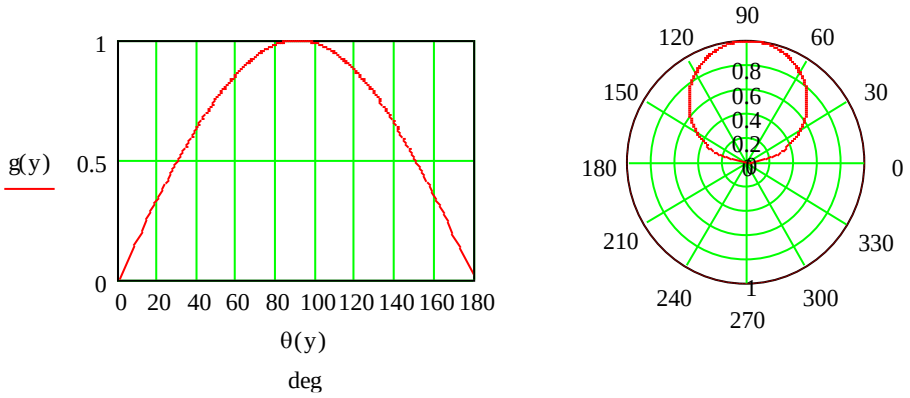


Figura 117. Patrones de radiación del dipolo elemental (Plano – E)

Se aprecia que cuando la relación L/λ es grande, la forma del patrón viene determinada principalmente por el término f(θ,φ). Esto es cierto sobre todo cuando la antena está irradiando en la dirección broadside. Sin embargo, cuando la antena irradia cerca de la dirección endfire, el término en sin(θ) puede afectar significativamente la amplitud de los lóbulos como se verá en el próximo ejemplo.

5-6.2 Línea de corriente con fase lineal

Cuando se tiene una distribución cualquiera de corrientes, la determinación directa del patrón de radiación puede volverse muy laboriosa. Sin embargo, aprovechando las propiedades de la transformada de Fourier es fácil estimar el efecto de los cambios en la función de iluminación. Por ejemplo, si I(z´) tuviera un módulo constante como en el caso anterior, pero su fase cambiara progresivamente a lo largo de la antena, se puede adelantar que el efecto será un desplazamiento de la función sinc, y en consecuencia también se desplazarán los lóbulos del patrón de radiación.

$$I(z') = \begin{cases} I_0\, e^{j\theta_0 z'/\lambda} & para \ \ |z'| \le \dfrac{L}{2} \\ 0 & para\ el\ resto \end{cases} \qquad (5.61)$$

Los resultados correspondientes son:

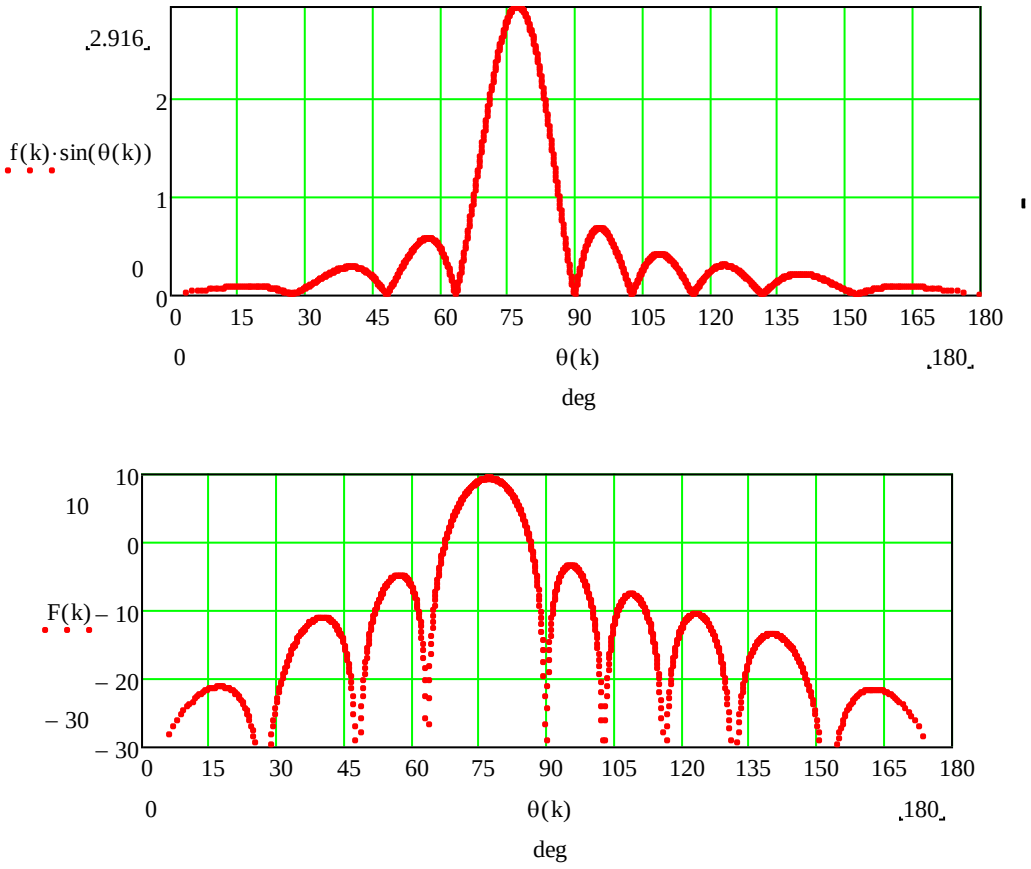


Figura 118. Transformada de la función de iluminación y patrón de radiación cartesiano de una antena con fase lineal.

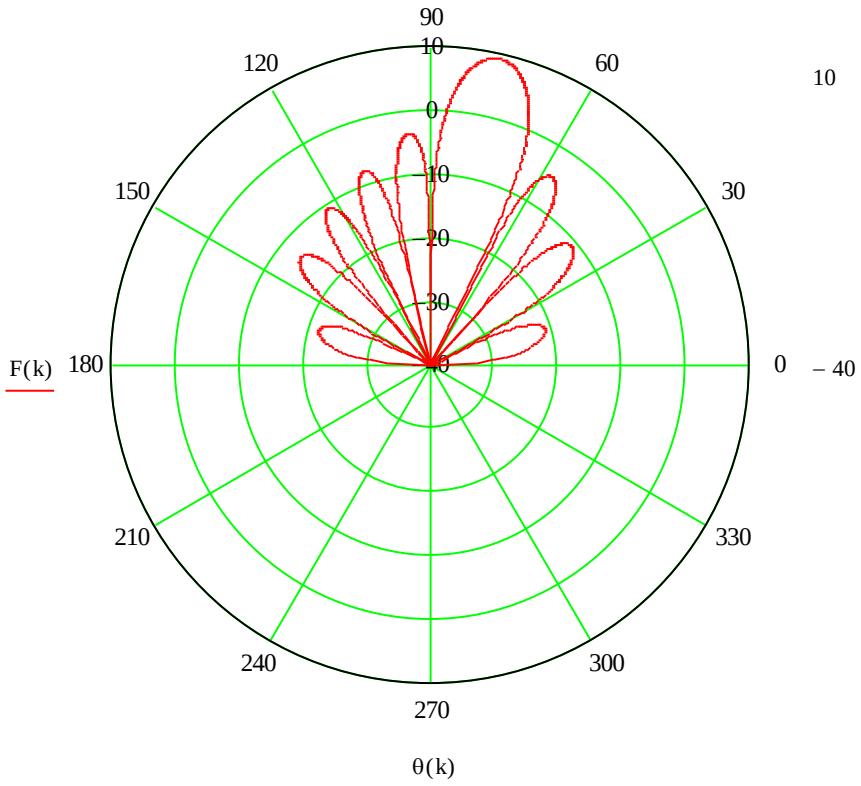


Figura 119. Patrón de radiación polar de la misma antena.

Como se aprecia en la gráfica, el lóbulo principal se ha desplazado desde la posición broadside (90º en el diagrama polar) hacia un lado (aproximadamente a 80º en el ejemplo). Esto sugiere la posibilidad de cambiar la dirección de máxima radiación de la antena simplemente cambiando la fase de la función de iluminación. De hecho esta es la base de los sistemas de barrido electrónico (electronic scan) utilizados en algunos sistemas de radar. Sin embargo, hay que tener cuidado con la deformación que puede tener el lóbulo principal cerca de la condición endfire como se puede apreciar en el siguiente gráfico.

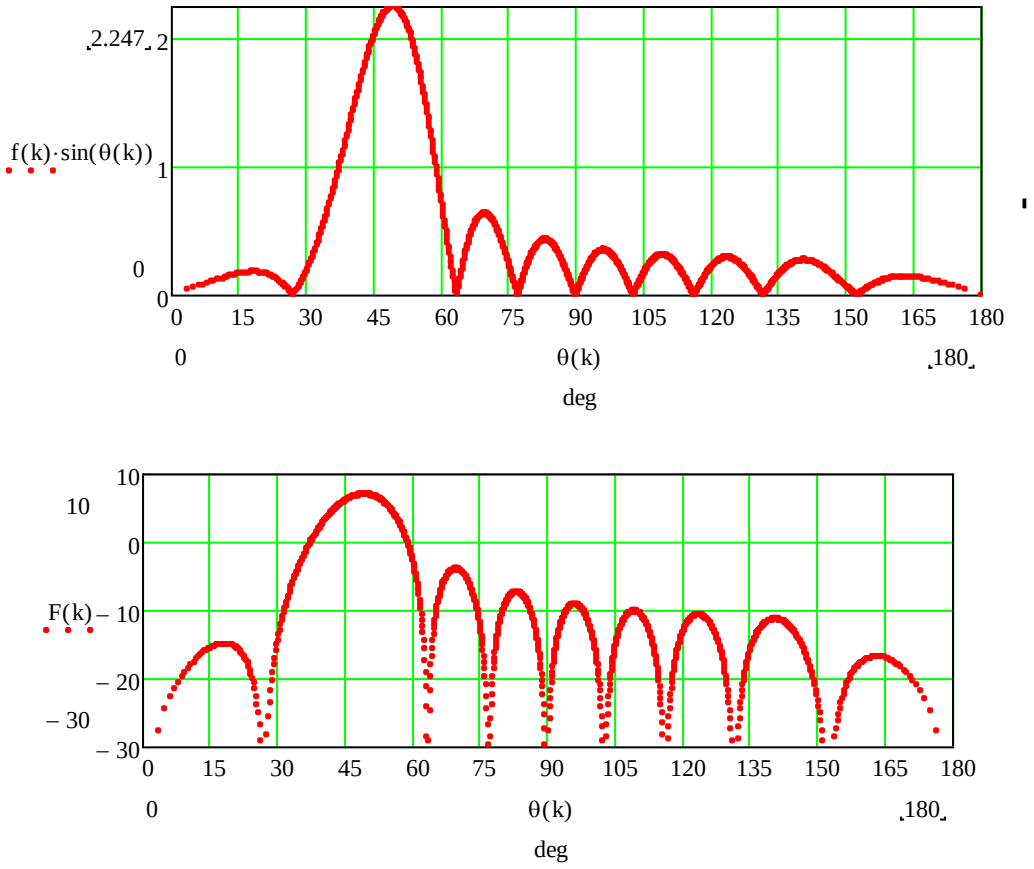


Figura 120. Antena lineal radiando cerca de la condición endfire.

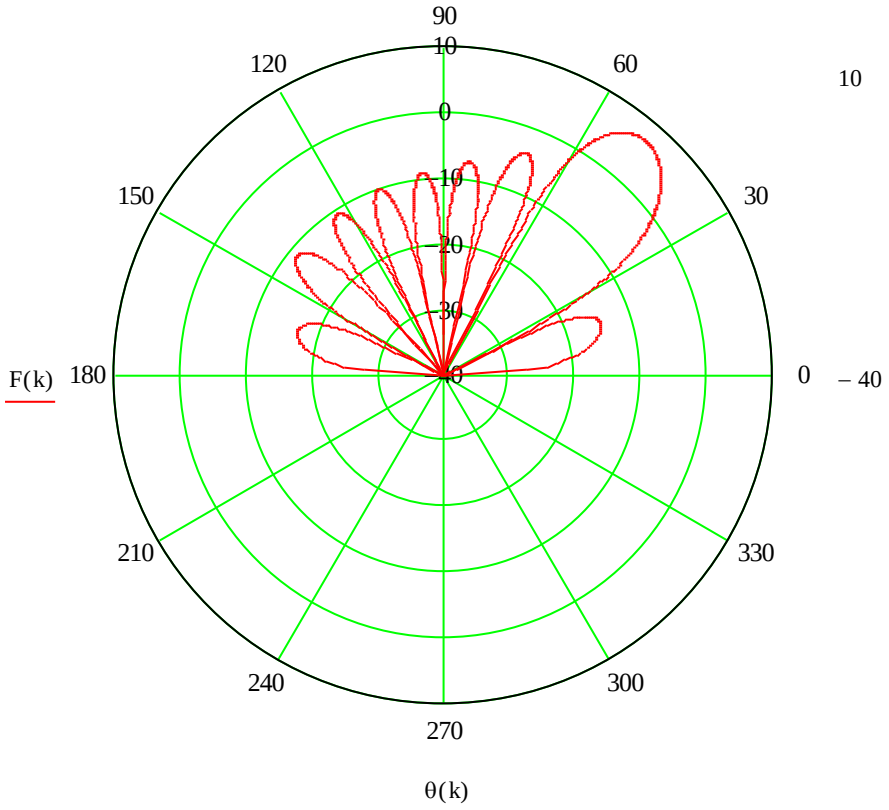


Figura 121. Patrón de radiación polar de la antena lineal radiando cerca de la condición endfire.

De igual manera, es posible aplicar estos conceptos para otras aplicaciones. Por ejemplo, en la sección 5-5.1 se observa que el primer lóbulo secundario tiene una magnitud apreciable que puede ser inconveniente para ciertas aplicaciones. De hecho, la relación SLL entre el lóbulo principal y este es apenas de 13.2 dB. Esto lóbulos de gran amplitud son ocasionados por la discontinuidad de la función de iluminación I(z´) al final de la estructura de la antena. Una manera de disminuir la amplitud de estos lóbulos de difracción es escogiendo una función de iluminación más suave. Por ejemplo si se utiliza una función triangular o una “coseno alzado” es posible aumentar la relación SLL a 20 o 26 dB.

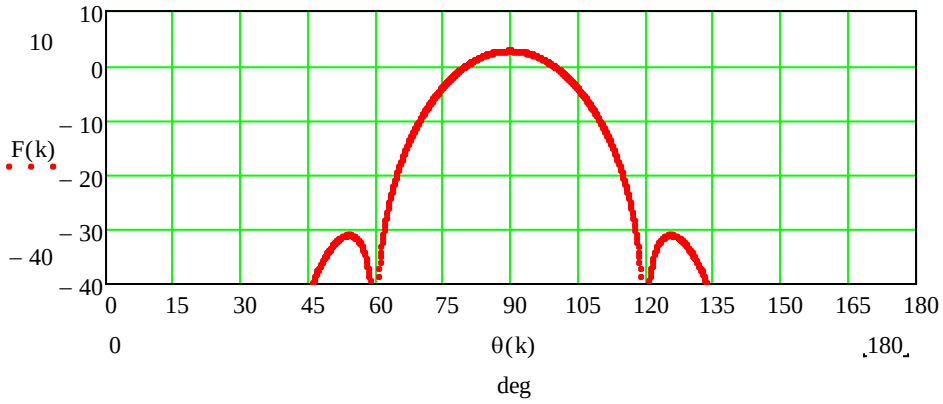


Figura 122. Patrón de radiación cartesiano de una antena lineal con iluminación “Hamming”

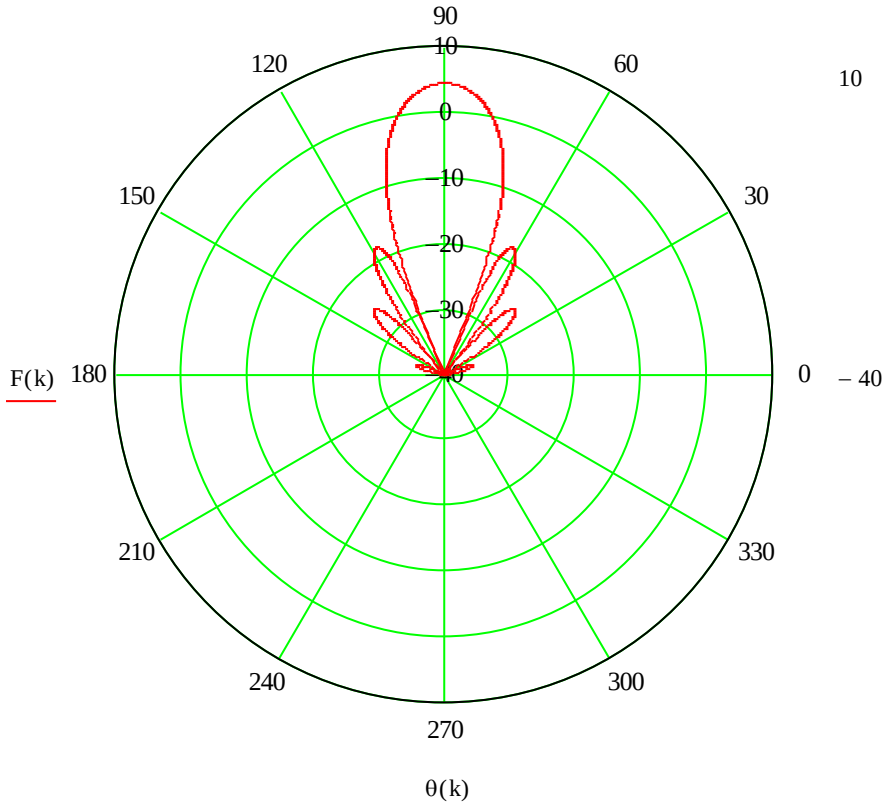


Figura 123. Patrón de radiación de una antena lineal con iluminación “Hamming”

Todos estos conceptos, que han sido derivados para una antena lineal son igualmente aplicables al caso de antenas de abertura que se discute en la próxima sección.

5-7. Radiación desde aberturas. Elemento de Huygens

Hasta el momento se ha considerado exclusivamente el caso de antenas constituidas por conductores donde se puede identificar fácilmente a las corrientes que constituyen la fuente del campo irradiado. Sin embargo, existe un grupo importante de antenas en las cuales no es posible identificar tales fuentes. Por el contrario, la antena está constituida por una guía de ondas que transporta un modo inhomogéneo y se abre hacia el espacio para producir la radiación. Tales antenas se conocen colectivamente con el nombre de antenas de abertura.

La base del análisis de las antenas de abertura es la teoría de fuentes secundarias de Huygens. De acuerdo a esta teoría, el frente de onda puede considerarse como constituido por una gran número de fuentes secundarias; cada una de ellas irradia ondas esféricas y la superposición de tales ondas esféricas da origen al nuevo frente de ondas. Sin embargo, a fin de que tales fuentes reproduzcan correctamente el campo radiado es necesario que las mismas posean un patrón de radiación de la forma $(1+\cos\theta)$, donde θ es el ángulo medido desde la perpendicular al frente de ondas, y que su fase esté adelantada 90º respecto al frente de ondas. Con esta definición de las fuentes se asegura además que no existe radiación hacia la propia fuente. (ojo: nótese que en este caso el eje polar está en la dirección perpendicular a la abertura, por lo cual se cambia función coseno por seno, en relación al caso de la antena lineal).

Si la fuente de radiación es altamente directiva (como es el caso de las antenas de abertura prácticas) se puede considerar el siguiente modelo para su estudio: un plano conductor infinito ubicado en el plano (x,y), con una abertura de dimensiones “a” y “b” respectivamente, iluminado desde atrás por la fuente de radiación y ubicada simétricamente alrededor del origen de coordenadas. El campo eléctrico tiene la dirección del eje “x” y será cero en todos los puntos del plano (por ser tangencial), excepto en la abertura, en la cual presentará una variación E(y).

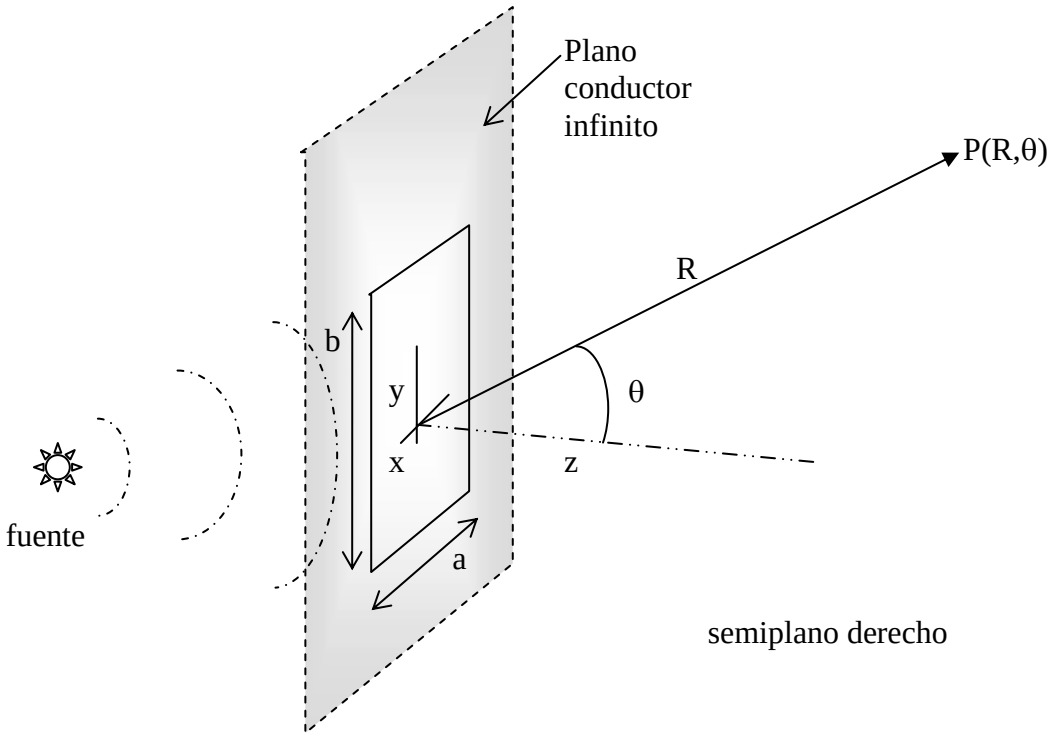


Figura 124

El campo lejano producido por una fuente secundaria dy será:

$$d\vec{E} = \frac{j\,k_0\,\vec{E}(y)\,a\,dy}{4\pi}\left(1+\cos\theta\right)\frac{e^{-j\,k_0\,r}}{r}$$

donde "r" es la distancia desde la fuente secundaria hasta el punto de estudio. Si "R" es la distancia al punto medida desde el origen se tiene que (en el campo lejano), $r \cong R - y\sin\theta$

El campo total irradiado será entonces la integral,

$$\vec{E} = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \frac{j\,k_0\,\vec{E}(y)\,a\,dy}{4\pi}\left(1+\cos\theta\right)\frac{e^{-jk_0 r}}{r} = \tag{5.62}$$

$$\vec{E} = \frac{j\,k_0}{4\pi}\,a\left(1+\cos\theta\right)\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \vec{E}(y)\,\frac{e^{-jk_0(R-y\sin\theta)}}{\left(R-y\sin\theta\right)}dy =$$

$$\vec{E}(R,\theta) = \frac{j\,k_0}{4\pi}\,a\left(1+\cos\theta\right)\frac{e^{-jk_0 R}}{R}\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \vec{E}(y)e^{jk_0(y\sin\theta)}dy \tag{5.63}$$

El resultado viene dominado principalmente por el término integral. Como el campo tangencial es cero en todas partes excepto en la abertura, los límites de la integral se pueden extender hasta el infinito, de manera que este término se transforme en,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \vec{E}(y) e^{jk_0(y\sin\theta)} dy = \int_{-\infty}^{\infty} \vec{E}(y) e^{j\frac{2\pi}{\lambda}(y\sin\theta)} dy =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \vec{E}(\frac{y}{\lambda}) e^{j2\pi\frac{y}{\lambda}\sin\theta} d\left(\frac{y}{\lambda}\right) \qquad (5.64)$$

Esta es una función de ángulo, y a excepción del término (1 + cos θ) constituye el patrón de radiación de la abertura. Un análisis de esta integral muestra que la misma es una integral de Fourier. Específicamente es la transformada inversa de Fourier que mapea el plano (y/λ) en el plano "sin θ". La función E(y/λ) recibe el nombre de función de iluminación de la antena de la misma manera como se definió I(z´) para las antenas lineales. Por tanto, se puede establecer que el patrón de radiación de la antena de abertura coincide con la anti-transformada de Fourier de la función de iluminación. En el caso presentado, se asumió que el campo eléctrico en la abertura de la antena solamente presentaba variaciones en la dirección "y" y de esta manera se vincula esta función de iluminación con "sin θ". Sin embargo, esto es igualmente aplicable al plano "x-z", donde E(x/λ) sería la función de iluminación y "sin φ" sería el plano transformado como se muestra en la figura 5.19.

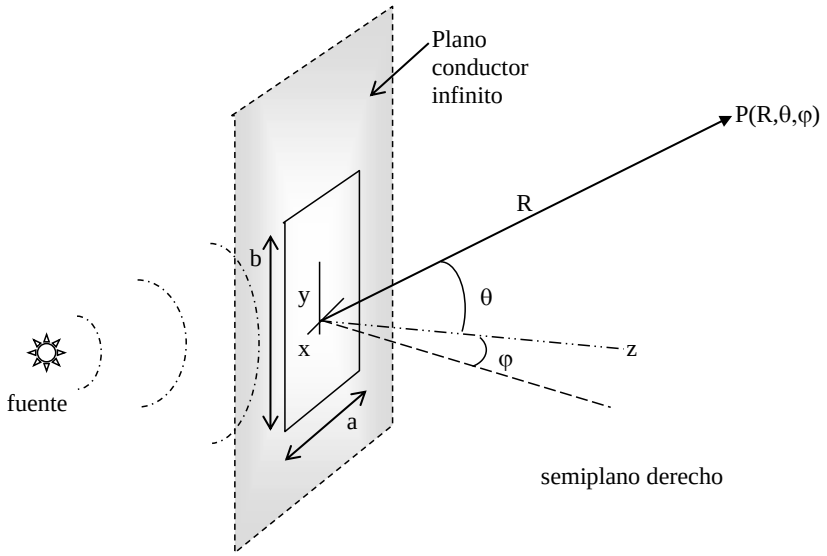


Figura 125

Combinando ambos efectos se tiene entonces la siguiente expresión para el campo lejano:

$$\vec{E}(R,\theta,\varphi)=\frac{j\,k_0}{4\pi}\left(1+\cos\theta\right)\left(1+\cos\varphi\right)\frac{e^{-j\,k_0 R}}{R}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\vec{E}(x,y)e^{j\,k_0(x\sin\varphi)}e^{j\,k_0(y\sin\theta)}dxdy \tag{5.65}$$

El término integral es una Transformada de Fourier Bidimensional y, debido a que las variables "x" y "y" están desacopladas, será simplemente el producto de las transformadas unidimensionales en cada plano.

Esto tiene grandes aplicaciones prácticas pues es posible obtener casi cualquier patrón de radiación deseado de una antena, simplemente diseñando en forma adecuada la función de iluminación. Las antenas de radar utilizadas en muchos aviones de combate utilizan este principio en la forma de arreglos de radiadores cuyas amplitudes y fases son controladas por un microprocesador dedicado. Tales antenas se conocen comúnmente con el nombre de "phase-array". Asimismo, se han utilizado phase-arrays en aplicaciones sofisticadas como es el caso del radar meteorológico que se muestra en la siguiente imagen

Figura 126. *(Installation of a phased array radar at NSSL Installation d'un radar tridimentionnel à balayage électronique au laboratoire de recherche NSSL. {{PD-USGov-DOC-NOAA}}). Tomado de* http://es.wikipedia.org/wiki/Archivo:Par_installation.jpg

De la misma manera, si se estudia cuidadosamente el campo en el entorno de una antena será posible estimar el comportamiento de la misma a gran distancia. A esto se le conoce con el nombre de transformación "campo cercano-campo lejano". De esta manera es posible juzgar la calidad del patrón de radiación de una antena directiva sin necesidad de recurrir a la utilización de una cámara anecoica, las cuales son extremadamente costosas. Las mediciones en el campo cercano se realizan en "cámaras semi-anecoícas" las cuales sólo están cubiertas de material absorbente en algunas de sus paredes. Sin embargo, es preciso destacar que las mediciones del campo deben hacerse tanto en magnitud como en fase y la sonda exploratoria debe moverse en forma precisa en un plano perpendicular a la dirección de radiación de la antena.

5-8 Elipsoides de Fresnell

Debe mencionarse que, además de la aplicación ya mencionada de determinación del patrón de radiación de antenas de abertura, la teoría de fuentes secundarias se utiliza también en el cálculo de enlaces de radio donde existan obstáculos. Para hallar el campo recibido es necesario integrar las contribuciones de todas las fuentes secundarias en el espacio. Esta es una integral de volumen, la cual se acostumbra realizar sumando las contribuciones de todas las fuentes que producen idéntico desfasaje.

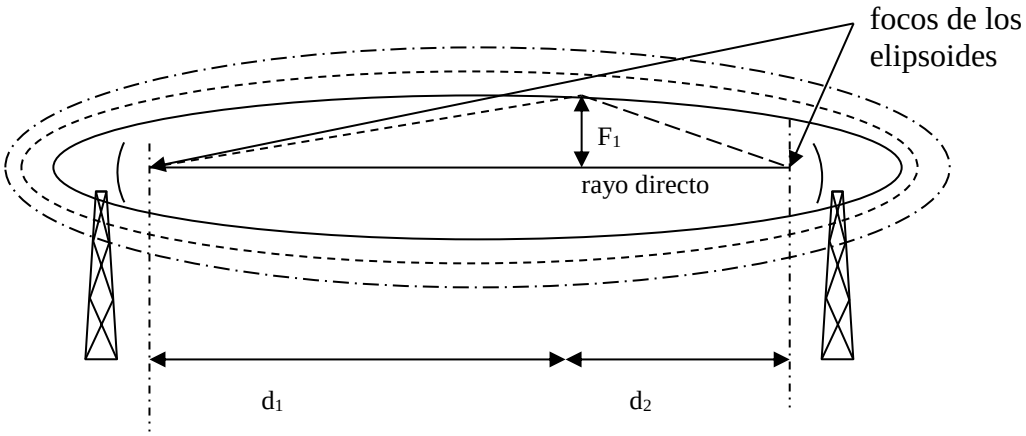


Figura 127

El lugar geométrico que corresponde a las fuentes secundarias que producen el mismo desfasaje entre el transmisor y el receptor es un elipsoide de revolución y el conjunto de todas estas superficies se conoce con el nombre de elipsoides de Fresnell. En el cálculo del campo recibido a partir de los elipsoides de Fresnell, se puede adelantar que la presencia de obstáculos en el trayecto de propagación elimina las contribuciones de algunos de estos elipsoides y altera el campo total recibido. Como la suma es fasorial, la variación del despeje entre el obstáculo y el trayecto geométrico entre las antenas puede producir una variación no monotónica en la intensidad de campo recibida. En las aplicaciones de comunicaciones en frecuencias elevadas, las distancias d_1 y d_2 son normalmente mucho mayores que la longitud de onda de la señal de radio, y por esta razón se puede considerar que el frente de onda es aproximadamente plano en un punto intermedio del enlace como el mostrado en la figura. Esta aproximación es conveniente para simplificar el cálculo del campo recibido. La intersección de este plano con los elipsoides produce una familia de círculos que representan todos los puntos del plano que producen el mismo desfasaje en el punto de recepción a partir de la señal emitida desde el transmisor. En

consecuencia, estos círculos vienen parametrizados por el desfasaje, el cual a su vez es función del radio del círculo. Al realizar la integración sobre todas fuentes secundarias del frente de onda, se obtiene una simplificación utilizando coordenadas polares en lugar de rectangulares: el elemento de superficie es un trozo de anillo como se muestra a continuación:

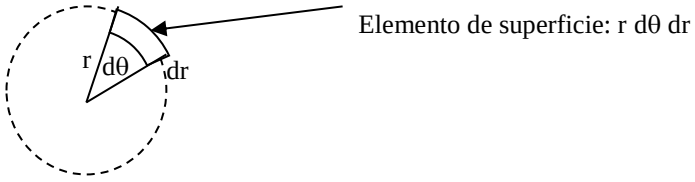


Figura 128

Si no hay obstrucciones la integración a lo largo de la circunferencia es directa porque todas las componentes tienen la misma magnitud y ángulo. En consecuencia sólo resta la integración en la dirección del radio. Para hallar la relación entre el desfasaje ϕ y el radio R de la circunferencia correspondiente se hará uso de la aproximación R << d_1 y d_2 . La geometría del enlace es la siguiente:

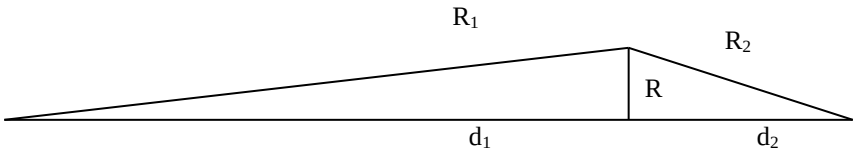


Figura 129

De la figura se obtiene:

$$\phi = \frac{2\pi}{\lambda}\left(\left(R_1 + R_2\right) - \left(d_1 + d_2\right)\right) = \frac{2\pi}{\lambda}\left(\left(R_1 - d_1\right) + \left(R_2 - d_2\right)\right)$$

Ahora bien:

$$R_1 - d_1 = \sqrt{d_1^2 + R^2} - d_1 = d_1\sqrt{1 + \left(\frac{R}{d_1}\right)^2} - d_1$$

Haciendo uso de la aproximación mencionada, se procede a expandir el radical en serie de potencias, y se conserva solamente los dos primeros términos de la expansión:

$$R_1 - d_1 \cong d_1\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{R}{d_1}\right)^2\right) - d_1 = \frac{d_1}{2}\left(\frac{R}{d_1}\right)^2$$

De igualmente se obtiene una expresión similar para R_2-d_2. Finalmente, el desfasaje vale:

$$\phi \cong \frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{d_1}{2}\frac{R^2}{d_1^2}+\frac{d_2}{2}\frac{R^2}{d_2^2}\right) = \frac{\pi}{\lambda}R^2\left(\frac{d_1+d_2}{d_1 d_2}\right) \qquad (5.66)$$

A su vez, de esta expresión se puede obtener el radio correspondiente para una fase dada. Como las sumas son fasoriales, algunas contribuciones producirán un incremento y otras un decremento de los resultados. Por esta razón es conveniente dividir el intervalo radial en zonas con desfasajes correspondientes a cuadrantes de circunferencia, es decir, los límites de una zona a otra son múltiplos de nπ/2. Estas zonas se denominan zonas de Fresnell y se numeran de acuerdo al número n; el valor del radio R de las zonas de Fresnell se denota por F_n.

$$F_n = \sqrt{\frac{n\lambda}{2}\frac{d_1 d_2}{d_1+d_2}}$$

El radio de la primera zona de Fresnell vale, entonces:

$$F_1 = \sqrt{\frac{\lambda}{2}\frac{d_1 d_2}{d_1+d_2}}$$

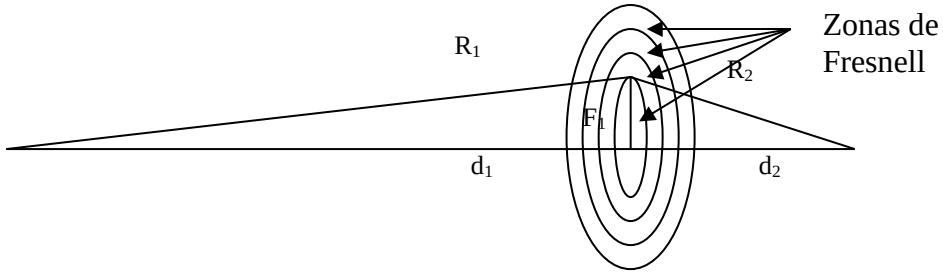


Figura 130

En la siguiente tabla se muestra el valor del radio de la primera zona de Fresnell para varias frecuencias utilizadas en enlace de comunicaciones prácticos, en el centro del enlace que es donde alcanza su valor máximo. La distancia entre extremos del enlace es 20 km.

f(MHz)	λ (en m)	F_1(m)	Angulo(º)
50,00	6,00	122,47	1,403
100,00	3,00	86,60	0,992
200,00	1,50	61,24	0,702
500,00	0,60	38,73	0,444
1.000,00	0,30	27,39	0,314
2.000,00	0,15	19,36	0,222
5.000,00	0,06	12,25	0,140
10.000,00	0,03	8,66	0,099
20.000,00	0,02	6,12	0,070

Tabla 5.1

Se ha agregado el ángulo subtendido por la primera zona de Fresnell a fin de comprarlo con el lóbulo principal de las antenas directivas empleadas comúnmente en comunicaciones.

Para estimar el campo recibido es necesario integrar la contribución de todas las fuentes secundarias que yacen en el plano transversal al enlace. Sin embargo, si existiese un obstáculo que impidiera el paso de algunas de estas componentes (como el iris de una cámara fotográfica) la integración deberá realizarse sobre las zonas de Fresnell no obstruidas.

5-9 Difracción alrededor de obstáculos. Modelo Filo de cuchillo

La teoría de fuentes secundarias de Huygens puede utilizarse para estimar el campo recibido en una antena receptora cuando el trayecto entre transmisor y receptor está parcialmente obstruido, como se muestra en la figura

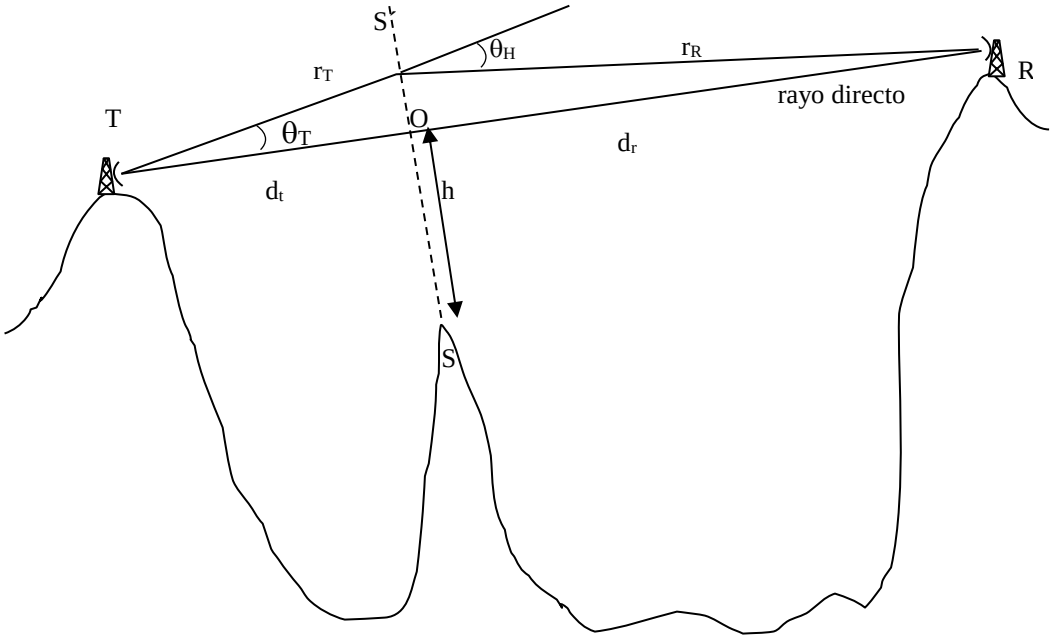


Figura 131. Geometría del trayecto parcialmente obstruido

De acuerdo a lo expuesto en la sección anterior, cada elemento del frente de ondas se convierte en una fuente secundaria de ondas esféricas, y el campo total en un punto dado puede obtenerse sumando todas las contribuciones de estas fuentes secundarias.

Para estimar el campo recibido en el punto receptor "R" se hará una integración de todas las contribuciones del frente de onda ubicado en el plano S-S´ donde yace la obstrucción. Debido a que la mayor parte de la energía se concentra en las primeras zonas de Fresnell se puede aproximar el frente de ondas curvo por uno plano a fin de simplificar los cálculos. De esta forma las integrales se pueden extender (formalmente) hasta el infinito, a sabiendas de que esas contribuciones serán despreciables y no introducirán error apreciable en el resultado. De esta forma el problema se reduce a uno de radiación desde aperturas y puede ser tratado de manera similar a lo discutido en la sección 5.5. En esta abertura, y considerando antenas directivas, es posible considerar que la amplitud de las fuentes secundarias es constante, y que su fase varía siguiendo la geometría presentada en la sección anterior (Elipsoides de Fresnell). Si se integran todas las fuentes secundarias en este frente de ondas el resultado debe ser el mismo que el de la propagación en espacio libre entre las dos antenas. Sin embargo, la obstrucción va a eliminar una porción de estas fuentes secundarias, lo cual se traduce en un cambio en los límites de

integración. Adicionalmente, y debido a que el obstáculo yace perpendicularmente al trayecto de propagación será necesario realizar un cambio de sistema de coordenadas (de polar a cartesiano) para tratar con esta geometría en particular.

Los pasos detallados de esta deducción se hallan en el libro de Livingston o en libros de óptica*. Aquí sólo se mostrarán algunos pasos intermedios.

La ecuación de partida es la 5.61 modificada a la geometría mostrada en la figura 130. Esta expresión considera que las fuentes secundarias fueron generadas por una fuente que se halla a una distancia d_t de la "abertura" y que a su vez re-irradian hacia un punto destino que se halla a d_r de dicho plano. Esto es el producto de dos ondas esféricas, las cuales a su vez están afectadas por la directividad de las antenas y los términos de directividad de las fuentes secundarias. El origen de coordenadas se ha escogido en el punto donde la línea geométrica que une a las antenas intercepta al plano S-S´.

$$\vec{E}(d_t, d_r, \theta) = \frac{j k_0}{4\pi} a\left(1+\cos\theta_H\right)\frac{e^{-j k_0 d_t}}{d_t}\frac{e^{-j k_0 d_r}}{d_r}\int_{y_1}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\vec{E}(y)\right| e^{j k_0 \phi} dx dy \qquad (5.67)$$

La constante "a" reúne todos los efectos de las excitaciones y las directividades de las antenas y ϕ es el desfasaje total definido en la ecuación (5.62). Ese campo eléctrico va a inducir una tensión en la antena receptora la cual entregará a su carga acoplada una potencia $P_R = |E|^2 / 4R_{rad}$. El valor promedio de esta potencia recibida vale:

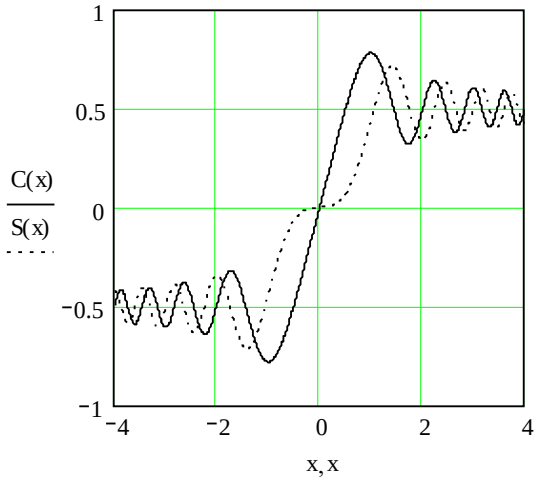
$$P_R = \frac{P_T}{(4\pi)^2}\frac{1}{4}\left(1+\cos\theta_H\right)^2 \frac{D_T D_R}{\left(d_t + d_r\right)^2}\left[\int_{y_1}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{j\frac{\pi}{\lambda}\frac{d_t+d_r}{d_t d_r}\left(x^2+y^2\right)} dx dy\right]^2 \qquad (5.68)$$

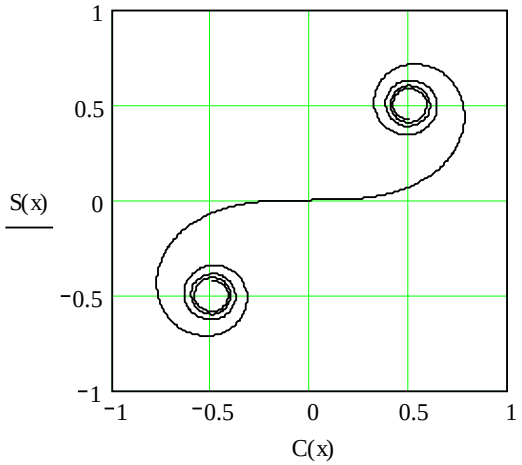
Como en la práctica las antenas se hallan alineadas para la máxima directividad, se puede considerar al ángulo θ_H muy cercano a 0 (Ver tabla 5.1). Asimismo, las integraciones con respecto a "x" y a "y" se pueden realizar separadamente. Las funciones de este tipo son las conocidas integrales de Fresnell, las cuales son parientes de la función error (erf(w) y erfc(w)). El término integral vale:

* Livingstone D. C., The Physics of Microwave Propagation; G. T. & E., Mayo 1967, páginas 45 a 48.
Longhurst R. S., Geometrical and Physical Optics, Longman, 1981, capítulo III

$$\int_{y_1}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{j\frac{\pi}{\lambda}\frac{d_t+d_r}{d_t d_r}\left(x^2+y^2\right)}\,dxdy = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\frac{\pi}{\lambda}\frac{d_t+d_r}{d_t d_r}\left(x^2\right)}\,dx \int_{y_1}^{\infty} e^{j\frac{\pi}{\lambda}\frac{d+d_r}{d_t d_r}\left(y^2\right)}\,dy \qquad (5.69)$$

Como se ha asumido que el obstáculo se extiende infinitamente en la dirección "x" la primera integral vale 2. Finalmente se obtiene, que la potencia recibida en función de los límites de integración y_1=-h y y_2=∞, vale:





$$P_R = \frac{1}{2} P_T\, D_T D_R \left(\frac{\lambda}{4\pi d}\right)^2 \left\{\left[C(\infty) - C(-h')\right]^2 + \left[S(\infty) - S(-h')\right]^2\right\} \qquad (5.70)$$

En esta expresión se han definido los siguientes términos:

$$d = d_t + d_r$$

$$C(w) = \int_0^w \cos\left(\frac{\pi u^2}{2}\right) du \qquad C(-w) = -C(w)$$

$$S(w) = \int_0^w \sin\left(\frac{\pi u^2}{2}\right) du \qquad S(-w) = -S(w)$$

$$h' = h\sqrt{\frac{2d}{\lambda d_t d_r}} = \sqrt{2}\,\frac{h}{F_1}$$

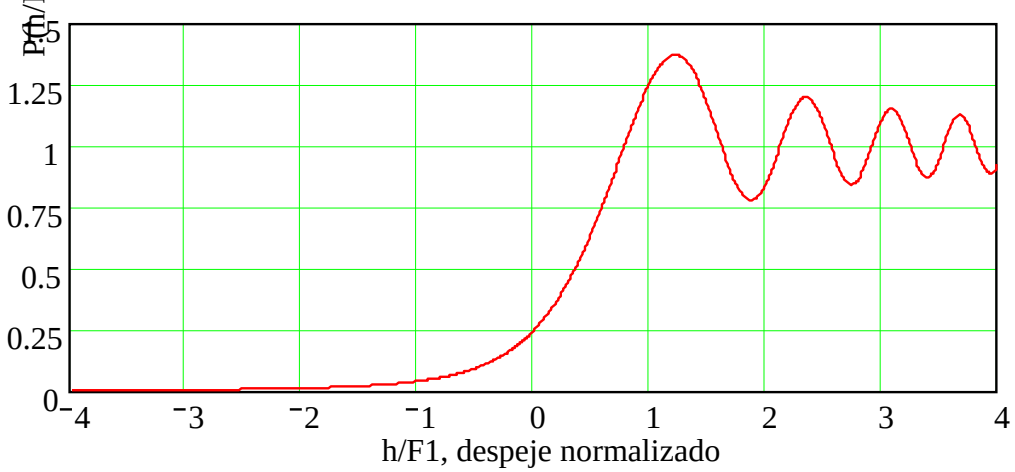
Figura 132 (a) Integrales de Fresnell (b) Espiral de Cornú.

La figura 5.24 muestra las funciones C(x) y S(x). En ausencia de obstáculos los límites de integración se van al infinito y se tiene:

$$C(\infty) = -C(-\infty) = S(\infty) = -S(-\infty) = \frac{1}{2}$$

En consecuencia

$$P_R = \frac{1}{2} P_T D_T D_R \left(\frac{\lambda}{4\pi d}\right)^2 \left\{[0{,}5+0{,}5]^2 + [0{,}5+0{,}5]^2\right\} = P_T D_T D_R \left(\frac{\lambda}{4\pi d}\right)^2 \qquad (5.71)$$



Este resultado concuerda con la expresión de espacio libre. En cualquier otro caso, el nivel de la señal recibida depende del despeje "h", o mejor dicho del despeje normalizado "h/F_1" como se muestra en la Figura 132.

Figura 133 Nivel de señal recibida en función del despeje.

Normalmente se acostumbra representar estos valores en dB respecto al espacio libre como se muestra en la siguiente figura.

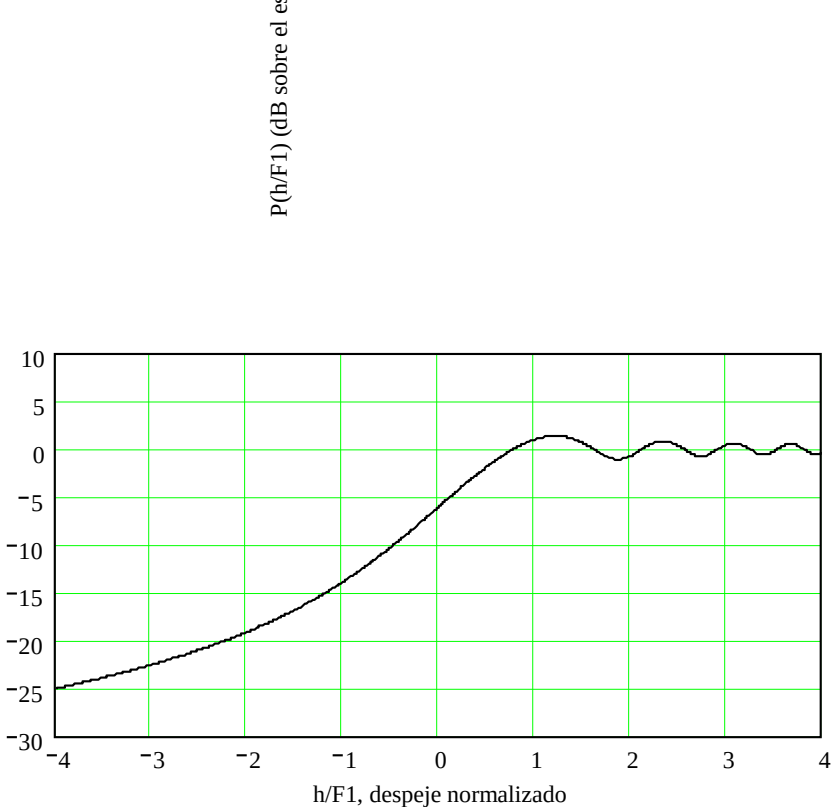


Figura 134 Nivel recibido en dB respecto al espacio libre.

Un análisis de esta figura muestra algunos aspectos interesantes:

1. Si el enlace es rasante (h=0) se recibe sólo la cuarta parte del nivel de espacio libre, a diferencia de lo que dictaría la intuición (es decir, la mitad).
2. El nivel de espacio libre se alcanza en h=0,6 F1. En muchos casos prácticos se toma éste valor como criterio para el despeje mínimo del radio enlace.
3. Más allá de este valor el valor recibido es incluso superior al del espacio libre. A un valor de aproximadamente h=1,4 F1 el valor alcanza a 1,4 dB por encima del espacio libre. Esto no viola ningún principio físico, lo que sucede es que se ha redireccionado la energía en esta dirección a expensas de la que correspondería a la zona de sombra.
4. A medida que el despeje continúa aumentando, la potencia recibida oscila alrededor del valor de espacio libre acercándose asintóticamente a él.
5. En la zona de sombra, el nivel de señal recibido desciende bruscamente con el despeje.

Capítulo 6. Radioenlaces

Equation Chapter 6 Section 1

6-1 Elementos de cálculo de enlaces.

El cálculo de enlaces consiste en predecir la potencia recibida en el punto de recepción y compararla con ciertas normas establecidas para estimar la calidad de la señal a ser recibida. Si bien no es el objeto de este curso estudiar en detalle todos los mecanismos de propagación que deben considerarse en el caso de los enlaces prácticos, se presentarán los principios básicos por medio de un ejemplo sencillo: el cálculo de un enlace punto-a-punto que cruza por encima de un terreno que ocasiona reflexiones.

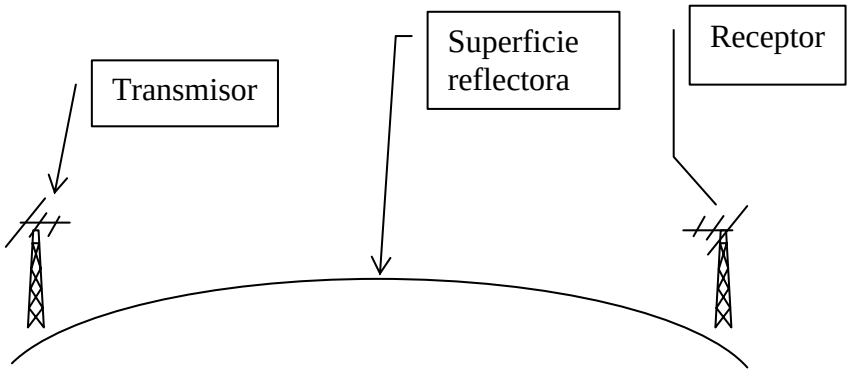


Figura 135

En primera instancia debe notarse que la propagación no ocurre en el espacio libre sino en la atmósfera, la cual como se ha discutido antes no es homogénea. En la sección 2-1.7 se estudió la Incidencia oblicua sobre un medio dieléctrico estratificado, y se concluyó que en este tipo de medio la propagación no ocurre en línea recta (como en el espacio libre) sino que describe una curva. En el caso particular de la atmósfera terrestre y en condiciones de refracción normal, esta curva es un arco de círculo y como la sección del geoide a la cual está referida la topografía puede aproximarse localmente por un arco de círculo, se acostumbra convertir el problema anterior otro más sencillo donde se reflejen sólo las curvaturas relativas de los arcos. Uno de los modelos produce una “Tierra Plana” y un rayo curvo, en tanto que el otro modelo produce un rayo recto sobre una Tierra que tiene un radio de curvatura modificado, KR_0 , donde R_0 es el radio real (6.370 km) y K es el llamado “Factor de Radio Efectivo de la Tierra”.

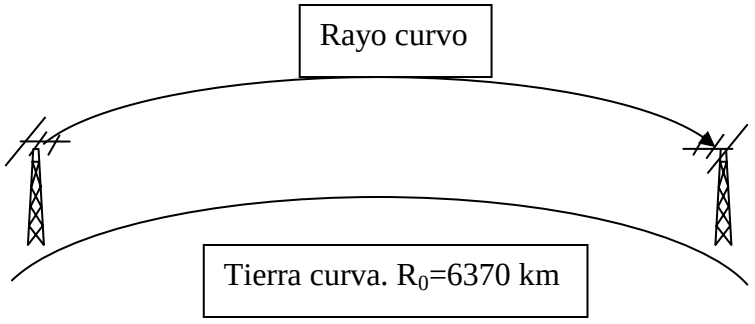


Figura 136

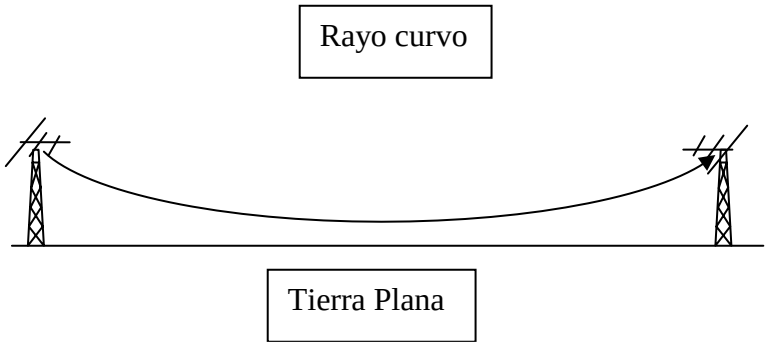


Figura 137

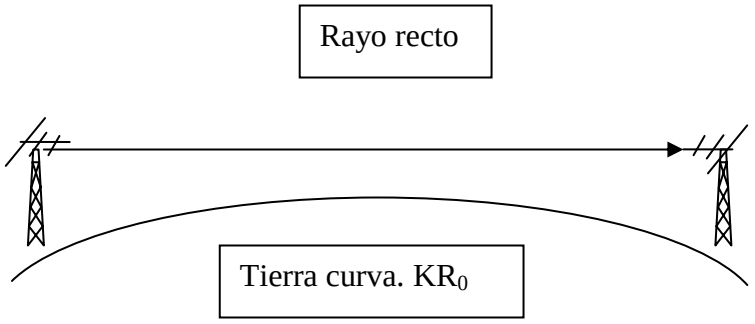


Figura 138

Por razones de comodidad usaremos este último modelo. En primera instancia se calculará la potencia recibida, haciendo abstracción de la superficie reflectora, para luego incorporar los efectos de la reflexión.

De la expresión 5.39 se tiene que

$$A_e = \frac{\text{Pot absorbida}}{\text{Densidad de potencia}}$$

así que la potencia entregada a la carga acoplada será el producto del área efectiva por la densidad de potencia. De la expresión 5.40 se tiene

$$U_{\max} = \frac{PIRE}{4\pi}$$

La densidad de potencia se obtiene dividiendo U entre el cuadrado de la distancia, R, por lo que finalmente, la potencia promedio entrada a la carga, P_r, será

$$P_r = A_e \frac{P_0 G_t}{4\pi R^2} \tag{6.1}$$

donde se ha utilizado la notación P_0 para simbolizar la potencia promedio de entrada $<P_i>$. Como el área efectiva fue definida en 5.50 en términos de la ganancia se puede escribir

$$A_r = \frac{\lambda^2}{4\pi} G_r \qquad \text{y} \qquad , P_r = \frac{P_0 G_t}{4\pi R^2} \frac{\lambda^2}{4\pi} G_r$$

Finalmente se obtiene la siguiente expresión para la potencia recibida,

$$P_r = P_0 \left(\frac{\lambda}{4\pi R} \right)^2 G_t G_r \tag{6.2}$$

Esta expresión se conoce como Formula de Friis[2] y se acostumbra escribirla en unidades logarítmicas como sigue:

$$P_R\big|_{dB} = P_T\big|_{dB} + G_T\big|_{dB} + G_R\big|_{dB} - 20\log\left(\frac{4\pi R}{\lambda}\right) \tag{6.3}$$

El último sumando representa la pérdida de Espacio Libre que ocurre entre dos antenas isotrópicas. Como la longitud de onda está relacionada con la velocidad de propagación, este término puede reescribirse como:

$$\begin{aligned} PEL\big|_{dB} &= 20\log(4\pi R/\lambda) = 20\log(4\pi f R/c) \\ &= 20\log(4\pi/c) + 20\log(f) + 20\log(R) \\ &= 20\log(4\pi/3.0\,\text{x}\,10^8\,[m/seg]) + 20\log(f\,[Hz]) + 20\log(R[m]) \\ &= 20\log(4.1919\,\text{x}\,10^{-8}\,[seg/m]) + 20\log(f\,[Hz]) + 20\log(R[m]) \\ &= -147.55 + 20\log(f\,[Hz]) + 20\log(R[m]) \end{aligned} \tag{6.4}$$

[2] Harald T. Friis. http://en.wikipedia.org/wiki/Friis_transmission_equation

Sin embargo, si se expresan las distancias en km y las frecuencias en GHz, habría que sumar 240 dB, al resultado anterior (20*9+20*3=240), por lo que la constante vale ahora 92.4482

$$P_R\big|_{dBm} = P_T\big|_{dBm} + G_T\big|_{dB} + G_R\big|_{dB} - 20\log\ f\,(GHz) - 20\log R(km) - 92.44 \qquad (6.5)$$

Por ejemplo, en un enlace de micro-ondas a 7.4 GHz, con potencia de transmisión 27 dBm, con antenas de 31,2 dB de Ganancia cada una, la potencia recibida a 40 km de distancia vale:

$$P_r = 27\,dBm + 31{,}2 + 31{,}2 - 20\log 7{,}4 - 20\log 40 - 92.44 =$$
$$= 27 + 62{,}4 - 17{,}38 - 32{,}04 - 92{,}44 = -52{,}46\,dBm$$

Un equipo típico de radio de alta capacidad para esta banda de frecuencias que transporte 56T1 (90 Mbps en modulación 8PSK) tiene un umbral de sensibilidad de receptor de -65.5 dBm para un BER de 10^{-6}. Esto quiere decir que la señal recibida está 13 dB por encima del umbral. Esta diferencia es lo que se conoce como "Margen de Desvanecimiento" y es la holgura necesaria en el sistema para protegerse contra posibles cambios en el nivel de la señal por atenuación o interferencia.

Para ilustrar estos efectos se dibujará un diagrama de nivel como sigue:

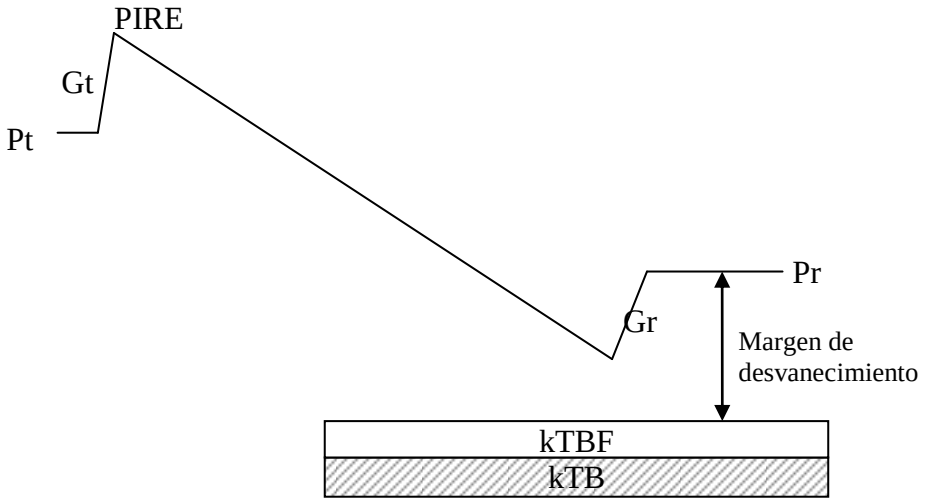


Figura 139

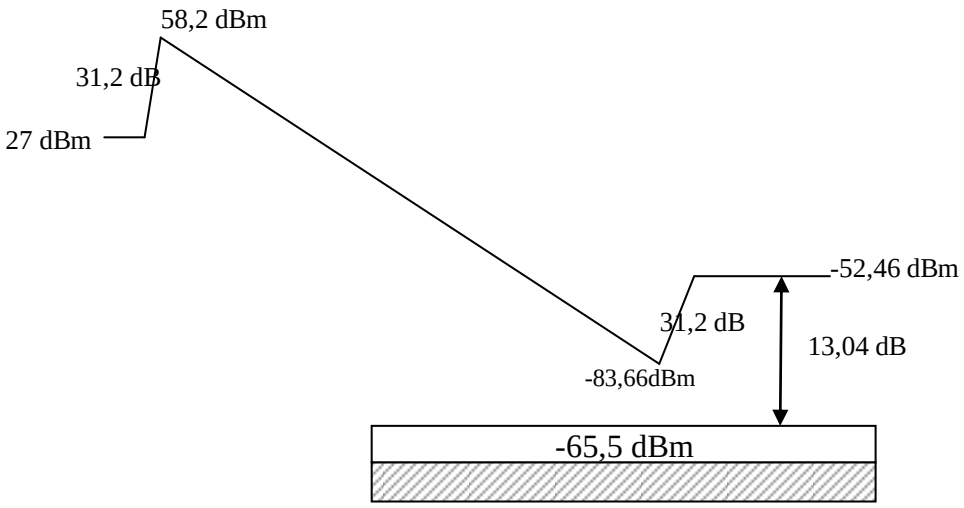


Figura 140

Ejemplo N° 2: Dentro de las ciudades se utilizan con frecuencia enlaces de radio en frecuencias milimétricas que, si bien son propensos a atenuación por lluvia, permiten enlaces altamente directivos con antenas de pequeño tamaño. Se utilizan con frecuencia para enlaces punto a punto entre radiobases de sistemas de telefonía celular. En este ejemplo se consideran radios de 5 watts operando en la frecuencia de 21 GHz, con antenas de 60 cm de diámetro que tienen una ganancia de 20 dB a esta frecuencia. Asumiendo un umbral de -72 dBm se va a graficar el nivel de señal recibida en función de la distancia para luego estimar el margen de desvanecimiento para protegerse contra los efectos de la lluvia.

De acuerdo a la fórmula de Friis, el nivel recibido será

$$P_r = P_t + G_t + G_r - 20 * \log(f) - 20 * \log(d) - 92{,}44$$

$$P_r = 10 * \log(5000) + 20 + 20 - 20 * \log(21) - 20 * \log(d) - 92{,}44$$

$$P_r = 37 + 20 + 20 - 26{,}44 - 92{,}44 - 20 * \log(d)$$

$$P_r = -41{,}89 - 20 * \log(d)$$

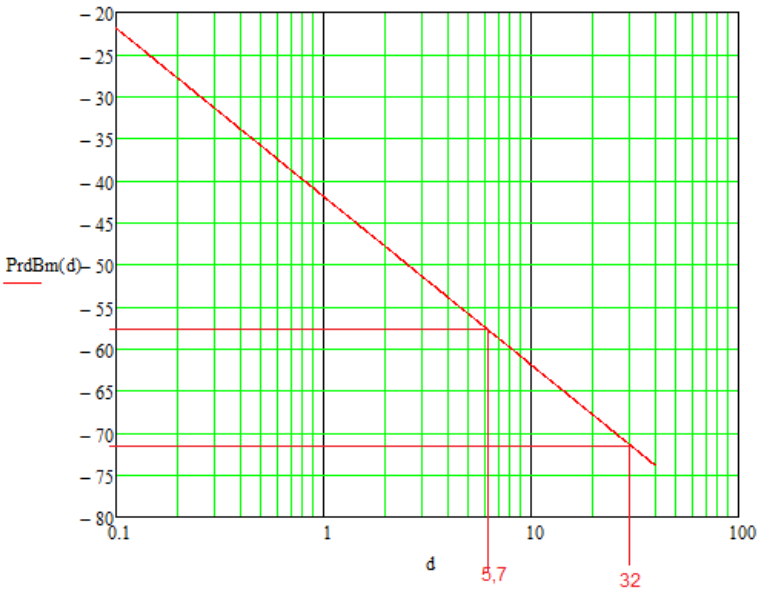


Figura 141

Según esto el enlace podría alcanzar hasta 32 km, obviamente sin ninguna protección contra desvanecimiento. Si se usa un margen de desvanecimiento de 15 dB el alcance se reduce a 5,7 km, pero esto permitiría que el sistema sobreviva ante un chubasco con una atenuación de 2,6 dB/km.

Consideremos ahora el efecto de la reflexión. La geometría es la que se presenta en la figura.

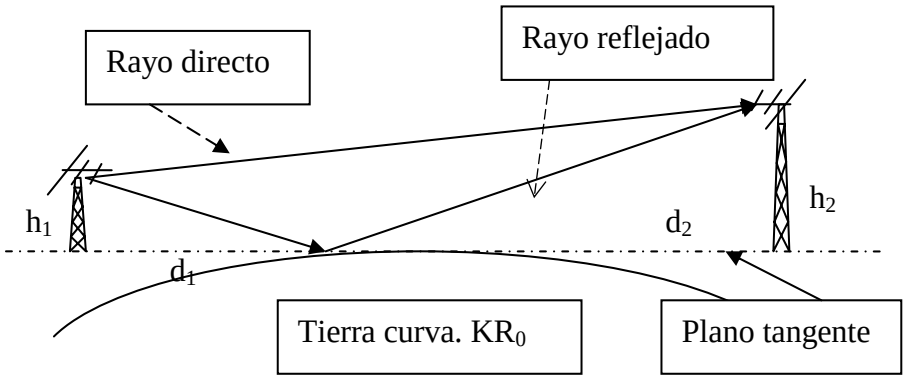


Figura 142

Las antenas están respectivamente a las alturas h_1 y h_2 sobre el plano tangente a la superficie terrestre donde ocurre la reflexión.

La señal que emerge de la antena 1 llega a la otra antena a través de dos caminos: vía el rayo directo y vía el rayo reflejado. Este último choca con la superficie reflectora y es reemitido siguiendo las leyes de reflexión que se estudiaron en el capítulo 2, y finalmente llega a la antena

2 donde se suma fasorialmente con el rayo directo. La amplitud viene afectada principalmente por la magnitud del coeficiente de reflexión en el punto de choque, así como de otros factores menores, los cuales se condensan en un "coeficiente de reflexión efectivo", ρ. La fase viene afectada principalmente por la diferencia de trayecto entre ambos rayos. Asumiendo que la superficie reflectora no agrega retardo de fase, la diferencia será directamente $k_0 \Delta r$. Para calcular esta diferencia de trayecto se modificará la geometría anterior para incluir la imagen de la antena receptora.

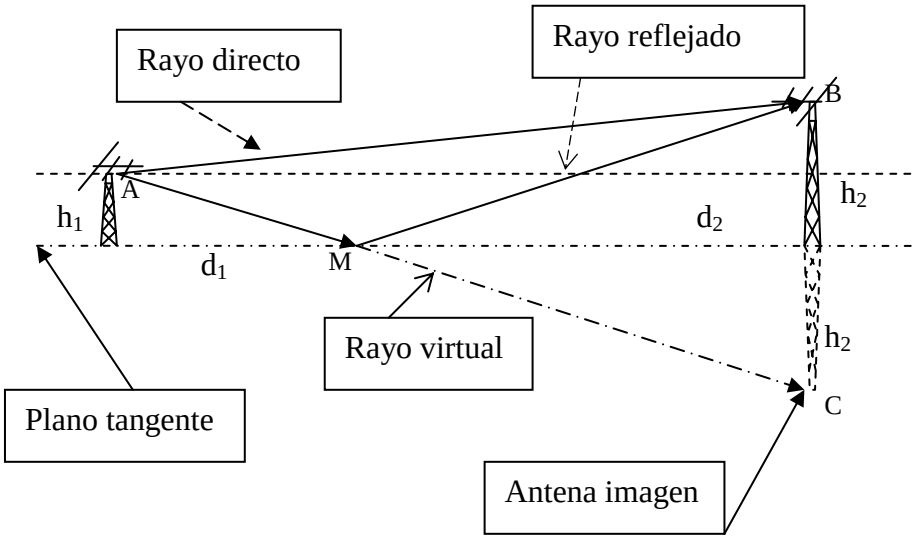


Figura 143

El trayecto recorrido por el rayo directo será AB, en tanto que el recorrido por el reflejado será AMB. Por la semejanza de triángulos, este último trayecto será idéntico a AMC.

$$\overline{AB} = \sqrt{(d_1 + d_2)^2 + (h_2 - h_1)^2}$$

$$\overline{AC} = \sqrt{(d_1 + d_2)^2 + (h_2 + h_1)^2}$$

$$\overline{AC} - \overline{AB} = d\left[\sqrt{1 + \left(\frac{h_2 + h_1}{d}\right)^2} - \sqrt{1 + \left(\frac{h_2 - h_1}{d}\right)^2}\right]$$

$$\overline{AC} - \overline{AB} \cong d\left[\left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{h_2 + h_1}{d}\right)^2\right) - \left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{h_2 - h_1}{d}\right)^2\right)\right] \cong$$

$$\cong d\,\frac{1}{2d^2}\left[(h_2 + h_1)^2 - (h_2 - h_1)^2\right] = \frac{1}{2d}\left[4h_2h_1\right]$$

$$\Delta r = \overline{AC} - \overline{AB} \cong \frac{2h_2h_1}{d} \tag{6.6}$$

De la misma figura se tiene que la distancia al punto de reflexión es,

$$\frac{d_1}{h_1} = \frac{d_2}{h_2} = \frac{(d_1 + d_2)}{(h_1 + h_2)}$$

por tanto

$$d_1 = \frac{(d_1 + d_2)}{(h_1 + h_2)} h_1$$

De la expresión 6.5 se obtiene que el desfasaje es

$$k_0 \, \Delta r \cong \frac{2\pi}{\lambda} \frac{2h_2h_1}{d} \tag{6.7}$$

En consecuencia, a medida que cambia la altura de cualquiera de las antenas sobre el plano tangente, cambia el desfasaje. En consecuencia la amplitud de la onda resultante variará desde un mínimo hasta un máximo dependiendo del coeficiente de reflexión. Por ejemplo si se hace variar la altura de una de las antenas se observa la siguiente variación en la amplitud de la señal recibida, para tres valores del coeficiente de reflexión efectivo.

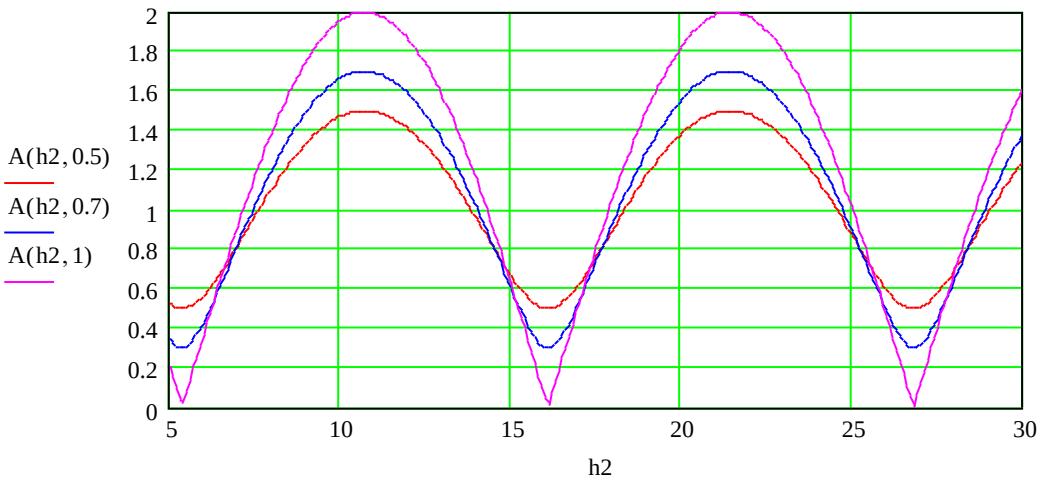


Figura 144

La amplitud del campo eléctrico recibido varía desde 1+ρ hasta 1-ρ, relativa a la onda directa. En unidades logarítmicas, la disminución de la potencia recibida respecto al valor de la onda directa ("nivel de espacio libre") será de $20\log(1-\rho)$. Para el caso numérico presentado, esta profundidad de desvanecimiento L_f vale respectivamente,

$$\rho = 0{,}5 \quad \Rightarrow \quad L_f = 6\,dB$$
$$\rho = 0{,}7 \quad \Rightarrow \quad L_f = 10\,dB$$
$$\rho = 1 \quad \Rightarrow \quad L_f = \infty\,dB$$

Si se comparan estos resultados con los cálculos anteriores se observa que el sistema podrá soportar el desvanecimiento para los dos primeros valores, pero colapsa cuando hay reflexión total. Por esta razón el ingeniero de comunicaciones debe evitar los trayectos donde haya fuertes reflexiones, o al menos minimizar sus efectos disminuyendo el valor del coeficiente de reflexión efectivo.

Por último debe notarse que la expresión 6.6 es función de la frecuencia. En consecuencia, para unas alturas de torre dadas, puede suceder que mientras una frecuencia se encuentra totalmente desvanecida, otra frecuencia mantenga un nivel cercano al de la onda directa. Se dice entonces que la reflexión produce un desvanecimiento selectivo (en frecuencia). Este efecto puede ser muy pernicioso en sistemas prácticos de banda ancha, pero también puede ser aprovechado en forma benéfica como protección de sistemas troncales en la forma de "diversidad en frecuencia". En dichos sistemas se dispone de varias frecuencias portadoras y un sistema de conmutación coloca la información sobre aquella frecuencia que no presente desvanecimiento.

6-2 Software para cálculo de enlaces.

La realización de un proyecto de comunicaciones inalámbricas conlleva el tener que realizar las actividades descritas en las secciones anteriores varias veces buscando la mejor ubicación de las estaciones repetidoras y finales. Para poder estimar los puntos de obstrucción deberá disponerse de los perfiles de terreno lo cual puede resultar muy laborioso partiendo de las curvas de nivel de las localidades. A lo largo de los años se han desarrollado diversos programas de computación que simplifican la labor del ingeniero al encargarse de muchas de las actividades rutinarias. Es de particular importancia la determinación de los perfiles de trayecto ya que hoy en día se dispone de bases de datos públicas (algunas de ellas gratuitas y otras no) con datos tridimensionales del terreno por lo que no hay necesidad de trabajar con mapas de papel. En consecuencia, es posible cambiar fácilmente la locación de las estaciones y obtener un nuevo perfil de trayecto en cuestión de segundos en lugar de horas. Adicionalmente, cuando se trata de sistemas móviles, es necesario realizar el perfil de terreno para cada uno de los radiales alrededor de la estación base lo cual es igualmente laborioso. Al utilizar un sistema automatizado es posible obtener una solución del problema en mucho menos tiempo.

La utilización de herramientas de software de cálculo de radioenlace permite entonces al ingeniero concentrarse en los aspectos más relevantes del problema tales como la ubicación de las estaciones, la población a ser servida, los costos involucrados, etc., así como en el análisis de los resultados obtenidos para cada una de las posibles propuestas del sistema.

Como se mencionó anteriormente, existe una variedad de programas de cálculo, cada uno de ellos adaptadas a una necesidad específica. Por ejemplo, las necesidades de los sistemas de radio celulares son muy distintas de las de los enlaces de radio inter-ciudades ya que en este último caso importan más las irregularidades topográficas que pueden producir obstrucción de la señal en tanto que en el primero hay que tomar en cuenta adicionalmente a las edificaciones ya que puede producir no sólo obstrucción de la línea de vista sino también reflexiones y difracciones que afectan la cobertura del radio. Debido a ello muchos de estos programas han sido desarrollados por empresas para su uso exclusivo o lo ofrecen a terceros bajo el pago de licencias. Sin embargo, también se han desarrollado otros bajo la modalidad de software libre o iniciativas de grupos sin ánimo de lucro como es el caso de los radioaficionados. Uno de los programas más populares de esta modalidad es "**Radio Mobile**" el cual fue desarrollado por un grupo de radioaficionados canadienses encabezado por Roger Coudé (VE2DBE). Este programa utiliza las bases de datos públicas disponibles en Internet, en particular la STRM que fue levantada durante las misiones del Transbordador Espacial. El modelo de propagación utilizado es ITM ("Irregular Terrain Model") el cual es adecuado para enlaces terrestres en línea de vista en frecuencias desde HF hasta microondas. Sin embargo, no es adecuado para enlaces ionosféricos que operan en las bandas de HF. El programa cuenta con algunas antenas estándar pero puede ser personalizado a cualquier antena real de la cual se disponga su patrón de radiación. Así mismo se puede personalizar la potencia de transmisión y la sensibilidad del receptor, las pérdidas en los cables de transmisión, la altura de las antenas sobre el terreno y se pueden incorporar pérdidas adicionales. Queda en manos del ingeniero la interpretación correcta de los resultados arrojados por el programa.

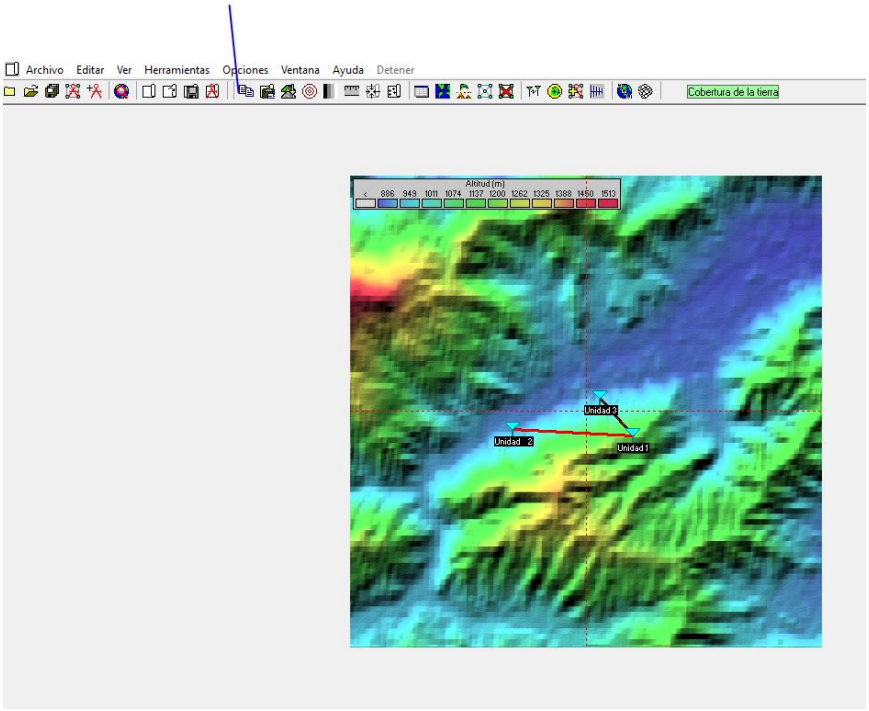


Figura 145 Interfaz de usuario de Radio Mobile

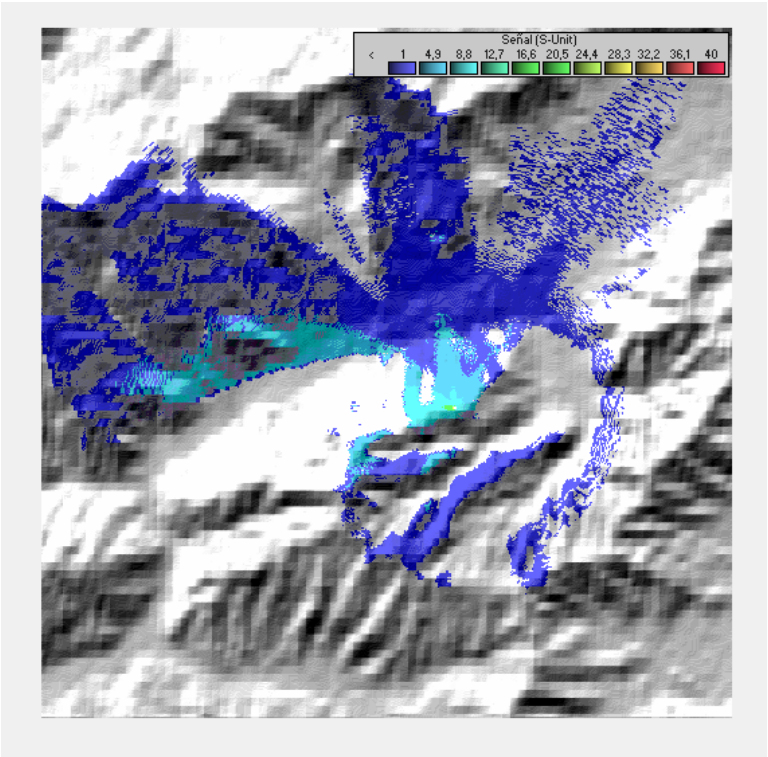


Figura 146 Cobertura de una estación de radio obtenida por Radio Mobile

Anexos

ANALISIS VECTORIAL

Generalmente se usan coordenadas rectangulares (x,y,z), cilíndricas (ρ,ϕ,z) y esféricas (r,θ,ϕ) como se muestran en la figura A.

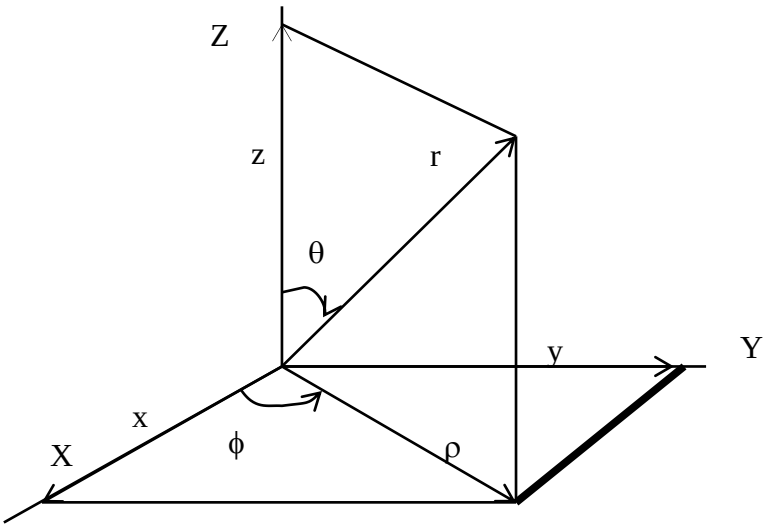


Fig A. Orientación del sistema de coordenadas normal

$$x = \rho \cos\phi = r \sin\theta \cos\phi$$
$$y = \rho \sin\phi = r \sin\theta \sin\phi$$
$$z = r\cos\theta$$
$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = r\sin\theta$$
$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$
$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{\rho^2 + z^2}$$
$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{\rho}{z}\right)$$

La transformación de las componentes de un vector entre los tres sistemas de coordenadas viene dada por

$$A_x = A_\rho \cos\phi - A_\phi \sin\phi$$
$$= A_r \sin\theta \cos\phi + A_\theta \cos\theta \cos\phi - A_\phi \sin\phi$$

$$A_y = A_\rho \sin\phi + A_\phi \cos\phi$$
$$= A_r \sin\theta \sin\phi + A_\theta \cos\theta \sin\phi + A_\varphi \cos\phi$$

$$A_z = A_r \cos\theta - A_\theta \sin\theta$$

$$A_\rho = A_x \cos\phi + A_y \sin\phi = A_r \sin\theta + A_\theta \cos\theta$$

$$A_\phi = -A_x \sin\phi + A_y \cos\phi$$

$$A_r = A_x \sin\theta \cos\phi + A_y \sin\theta \sin\phi + A_z \cos\theta$$
$$= A_\rho \sin\theta + A_z \cos\theta$$

$$A_\theta = A_x \cos\theta \cos\phi + A_y \cos\theta \sin\phi - A_z \sin\theta$$
$$= A_\rho \cos\theta - A_z \sin\theta$$

Los vectores unitarios en estos tres sistemas se denotaran respectivamente $(\hat{u}_x, \hat{u}_y, \hat{u}_z)$, $(\hat{u}_\rho, \hat{u}_\varphi, \hat{u}_z)$y $(\hat{u}_r, \hat{u}_\theta, \hat{u}_\varphi)$. Los elementos de volumen (diferencial) son:

$$d\tau = dx\, dy\, dz = \rho\, d\rho\, d\phi\, dz = r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\phi$$

Los elementos de área (diferenciales) son :

$$d\vec{s} = \hat{u}_x\, dy\, dz + \hat{u}_y\, dx\, dz + \hat{u}_z\, dx\, dy$$
$$= \hat{u}_\rho\, \rho\, d\phi\, dz + \hat{u}_\phi\, d\rho\, dz + \hat{u}_z\, \rho\, d\rho\, d\phi$$
$$= \hat{u}_r\, r^2 \sin\theta\; d\theta\, d\phi + \hat{u}_\theta r \sin\theta\, dr\, d\phi + \hat{u}_\phi r\, dr\, d\theta$$

Los elementos diferenciales de los vectores de longitud son:

$$d\vec{l} = \hat{u}_x dx + \hat{u}_y dy + \hat{u}_z dz$$
$$= \hat{u}_\rho\, d\rho + \hat{u}_\varphi \rho\, d\phi + \hat{u}_z\, dz = \hat{u}_r\, dr + \hat{u}_\theta\, r\, d\theta + \hat{u}_\phi\, r \sin\theta\, d\phi$$

Las operaciones algebraicas son las mismas en todos los sistemas coordinados ortogonales derechos (right-handed). Si se consideran los vectores unitarios $(\hat{u}_1, \hat{u}_2, \hat{u}_3)$y las componentes de un vector A en ese sistema coordinado como (A_1, A_2, A_3) la operación **suma** de dos vectores se define como:

$$\vec{\mathrm{A}} + \vec{\mathrm{B}} = \hat{u}_1(A_1 + B_1) + \hat{u}_2(A_2 + B_2) + \hat{u}_3(A_3 + B_3)$$

La **multiplicación escalar** o **producto interno** se define como:

$$\vec{\mathrm{A}} \cdot \vec{B} = A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3$$

La **multiplicación vectorial o producto externo** viene definida por:

$$\vec{\mathrm{A}} \times \vec{\mathrm{B}} = \begin{bmatrix} \hat{u}_1 & \hat{u}_2 & \hat{u}_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{bmatrix}$$ donde el determinante se calcula de la manera usual.

Los operadores vectoriales son los siguientes: **gradiente** de un escalar w (∇w), **divergencia** de una vector $(\nabla \cdot \vec{\mathrm{A}})$, **rotor** de un vector $(\nabla \times \vec{\mathrm{A}})$, **Laplaciano** de un escalar $(\nabla^2 w)$y **Laplaciano** de un vector $(\nabla^2 \vec{A})$

El operador **nabla** en coordenadas rectangulares vale:

$\nabla = \hat{u}_x \frac{\partial}{\partial x} + \hat{u}_y \frac{\partial}{\partial y} + \hat{u}_z \frac{\partial}{\partial z}$y los demás operadores valen:

$$\nabla w = \hat{u}_x \frac{\partial w}{\partial x} + \hat{u}_y \frac{\partial w}{\partial y} + \hat{u}_z \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\nabla \times \vec{\mathrm{A}} = \begin{bmatrix} \hat{u}_x & \hat{u}_y & \hat{u}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{bmatrix}$$

$$\nabla^2 w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}$$

En coordenadas cilíndricas se tiene:

$$\nabla w = \hat{u}_\rho \frac{\partial w}{\partial \rho} + \hat{u}_\varphi \frac{1}{\rho}\frac{\partial w}{\partial \varphi} + \hat{u}_z \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho A_\rho) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\nabla \times \vec{\mathrm{A}} = \hat{u}_\varphi \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_z}{\partial \varphi}\right) - \hat{u}_\varphi \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho}\right) + \hat{u}_z \left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho A_\varphi) - \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\rho}{\partial \varphi}\right]$$

$$\nabla^2 w = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial w}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial^2 z}$$

En el caso de coordenadas esféricas se tiene:

$$\nabla w = \hat{u}_r \frac{\partial w}{\partial r} + \hat{u}_\theta \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \theta} + \hat{u}_\varphi \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial w}{\partial \varphi}$$

$$\nabla \cdot \vec{\mathrm{A}} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 A_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(A_\theta \sin\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}$$

$$\nabla \times \vec{\mathrm{A}}$$

$$= \hat{u}_r \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial \theta}(A_\varphi \sin\theta) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi}\right] + \hat{u}_\theta \frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial r}(r A_\varphi)\right] + \hat{u}_\varphi \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right]$$

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial w}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial w}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2}$$

Existen un cierto número de identidades vectoriales que son independientes del sistema de coordenadas.

$A^2 = \vec{A} \cdot \vec{A}$ Si **A** es un vector complejo, entonces $|A|^2 = \vec{A} \cdot \overrightarrow{A^*}$

$\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$

$\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$

$\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$

$(\vec{A} + \vec{B}) \cdot \vec{C} = \vec{A} \cdot \vec{C} + \vec{B} \cdot \vec{C}$

$(\vec{A} + \vec{B}) \times \vec{C} = \vec{A} \times \vec{C} + \vec{B} \times \vec{C}$

$\vec{A} \cdot \vec{B} \times \vec{C} = \vec{B} \cdot \vec{C} \times \vec{A} = \vec{C} \cdot \vec{A} \times \vec{B}$

$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \cdot \vec{C})\vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B})\vec{C}$

Para las derivadas se tiene

$\nabla(v + w) = \nabla v + \nabla w$

$\nabla \cdot (\vec{A} + \vec{B}) = \nabla \cdot \vec{A} + \nabla \cdot \vec{B}$

$\nabla \times (\vec{A} + \vec{B}) = \nabla \times \vec{A} + \nabla \times \vec{B}$

$\nabla(vw) = v\nabla w + w\nabla v$

$\nabla \cdot (w\vec{A}) = w\nabla \cdot \vec{A} + \vec{A} \cdot \nabla w$

$\nabla \times (w\vec{A}) = w\nabla \times \vec{A} - \vec{A} \times \nabla w$

$\nabla \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot \nabla \times \vec{A} - \vec{A} \cdot \nabla \times \vec{B}$

$\nabla^2 \vec{A} = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla \times \nabla \times \vec{A}$

$\nabla \times (v\nabla w) = \nabla v \times \nabla w$

$\nabla \times \nabla w = 0$

$\nabla \cdot \nabla \times \vec{A} = 0$

Para las operaciones integrales se tiene

$\iiint \nabla \cdot \vec{A} d\tau = \oiint \vec{A} \cdot d\vec{s}$

$\iint \nabla \times \vec{A} \cdot d\vec{s} = \oint \vec{A} \cdot dl$

$\iiint \nabla \times \vec{A}\, d\tau = -\oiint \vec{A} \times d\vec{s}$

$\iint \vec{n} \times \nabla w\, d\vec{s} = \oint w\, dl$

Identidad de Helmholtz

$4\pi\overrightarrow{A} = -\nabla \iiint \frac{\nabla' \cdot \vec{A}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} d\tau' + \nabla \times \iiint \frac{\nabla' \times \vec{A}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} d\tau'$ la cual es válida si A es una función regular (well-behaved) y se desvanece en el infinito según r^{-2} y ∇' es el operador diferencial en el sistema de coordenadas del integrando

Constantes físicas

$c = 299792458 \frac{m}{seg}$ $\varepsilon_0 = 8.854187817610^{-12} \frac{F}{m}$ $\mu_0 = 4 * \pi * 10^{-7} \frac{H}{m}$

Cambios de unidades

1' = 12" = 30.48 cm = 0.3048 m

1" = 2.54 cm = 0.0254 m